命题演算自然推理形式系统N

王捍贫

北京大学信息科学技术学院软件研究所

§6 命题演算的自然推理形式系统N

怎么在计算机上实现如下有效推理：

$$\{p \to q,\ q \to r\} \vdash p \to r$$

- 识别符号$p, q, r, \ldots$
- 识别公式$p \to q,\ q \to r, \ldots$
- 推理方法

计算机上实现有效推理需要建立：

- 字母表（符号库） —— 非空集合
- 公式集合 —— 字母表中符号的有限序列
- 公理集合 —— 公式集合的子集
- 规则集合 —— 公式集合的部分多元运算

形式系统

- 符号库（字母表）
- (形式)公式
- (形式)公理
- (形式)推理规则

推理

符号库和形式公式统称为形式语言。
形式公理和形式推理规则统称为形式推理。

命题演算的自然推理形式系统**N**

N的符号库

(1) p_1, p_2, $\ldots$ (可数个命题符号)

(2) $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (5个联结词符号)

(3)), ((2个辅助符号)

N的公式

归纳定义如下：

(1) 命题符号都是公式；

(2) 若α是公式，则$(\neg\alpha)$也是公式；

(3) 若α，β是公式，则$(\alpha \vee \beta)$，$(\alpha \wedge \beta)$，$(\alpha \to \beta)$，$(\alpha \leftrightarrow \beta)$也都是公式；

(4) 每个公式都是有限次使用(1)、(2)或(3)得到的.

N的公理

公理集合为空集

N的推理规则

包含律：

若$\alpha \in \Gamma$，

则$\Gamma \vdash \alpha$. $\quad (\in)$

$\neg$消去律：

若$\Gamma \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash \beta$, $\Gamma \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash (\neg\beta)$,

则$\Gamma \vdash \alpha$. $\quad (\neg-)$

N的推理规则(续一)

$\rightarrow$消去律：

若$\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$， $\Gamma \vdash \alpha$,

则$\Gamma \vdash \beta$. $(\rightarrow -)$

$\rightarrow$引入律：

若$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$,

则$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. $(\rightarrow +)$

N的推理规则(续二)

$\vee$消去律：

若$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$，$\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \gamma$，

则$\Gamma \cup \{(\alpha \vee \beta)\} \vdash \gamma$. $\qquad (\vee-)$

$\vee$引入律：

若$\Gamma \vdash \alpha$,

则$\Gamma \vdash (\alpha \vee \beta)$，$\Gamma \vdash (\beta \vee \alpha)$. $\qquad (\vee+)$

N的推理规则(续三)

$\wedge$消去律：

若$\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$,

则$\Gamma \vdash \alpha$, $\Gamma \vdash \beta$. $\qquad (\wedge-)$

$\wedge$引入律：

若$\Gamma \vdash \alpha$, $\Gamma \vdash \beta$,

则$\Gamma \vdash (\alpha \wedge \beta)$. $\qquad (\wedge+)$

N的推理规则(续四)

$\leftrightarrow$消去律：

(1) 若$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$， $\Gamma \vdash \alpha$

则$\Gamma \vdash \beta$. $\quad (\leftrightarrow -)$

(2) 若$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$， $\Gamma \vdash \beta$

则$\Gamma \vdash \alpha$. $\quad (\leftrightarrow -)$

$\leftrightarrow$引入律：

若$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$， $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \alpha$,

则$\Gamma \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$. $\quad (\leftrightarrow +)$

用形式系统N可以做什么？

例2.12

(1) $\{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha\} \vdash (\alpha \to \beta)$ $\qquad (\in)$

(2) $\{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha\} \vdash \alpha$ $\qquad (\in)$

(3) $\{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha\} \vdash \beta$ $\qquad (\to -)(1)(2)$

(4) $\{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha\} \vdash (\beta \to \gamma)$ $\qquad (\in)$

(5) $\{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha\} \vdash \gamma$ $\qquad (\to -)(3)(4)$

(6) $\{(\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \gamma)$ $\qquad (\to +)(5)$

N的证明序列

定义13 若有限序列

$$\Gamma_1 \vdash \alpha_1, \Gamma_2 \vdash \alpha_2, \cdots, \Gamma_n \vdash \alpha_n \qquad (*)$$

满足:

- Γ_1, Γ_2, $\cdots$, Γ_n为**N**中有限公式集;
- α_1, α_2, $\cdots$, α_n为**N**中公式;
- 每个$\Gamma_i \vdash \alpha_i$ $(1 \le i \le n)$都是对$(*)$中它之前的若干个$\Gamma_j \vdash \alpha_j$ $(1 \le j < i \le n)$应用**N**的某条推演规则得到的。

则称$(*)$为$\Gamma_n \vdash \alpha_n$在**N**的一个 (形式)证明序列。

此时，也称α_n在**N**中可由Γ_n(形式)证明或(形式)推出，记为$\Gamma_n \vdash_{\mathrm{N}} \alpha_n$.

由例12知: $\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)\} \vdash_{\mathrm{N}} (\alpha \to \gamma)$

注记

1. 命题形式与**N**公式在定义上虽然一样，本质上也一样，都是命题的抽象，但他们仍有差别：**N**公式仅由**N** 中符号构成。命题形式由命题符号构成，而命题符号要广泛得多

2. 形式语言与与元语言

   (a) **N**中的符号和公式称为**N**的形式语言。 它描写了**N**的组成部分。

   (b) 在叙述**N**的构成和性质时使用了非**N**中符号，如α, β等， 这些符号称为元语言符号。
   元语言一般为自然语言。

公式的简写

1. 省略命题形式最外层括号;
2. $\neg$的优先级高于其它的;
3. $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3$代表$(\alpha_1 \vee (\alpha_2 \vee \alpha_3))$.

   即用同一联结词构造公式时，括号从右往左加。

   对$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$类似处理。

证明序列的简写

1. 将有限公式集合$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$简写为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。

2. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$中元素没有顺序关系.
(若有顺序关系,将记为$<\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n>$.)

3. $\Gamma \cup \{\alpha\}$也将记为Γ, α.

例12的简写

$$(1)\quad (\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha \vdash (\alpha \to \beta) \qquad (\in)$$

$$(2)\quad (\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha \vdash \alpha \qquad (\in)$$

$$(3)\quad (\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha \vdash \beta \qquad (\to -)(1)(2)$$

$$(4)\quad (\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha \vdash (\beta \to \gamma) \qquad (\in)$$

$$(5)\quad (\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma),\ \alpha \vdash \gamma \qquad (\to -)(3)(4)$$

$$(6)\quad (\alpha \to \beta),\ (\beta \to \gamma) \vdash (\alpha \to \gamma) \qquad (\to +)(5)$$

例13

给出下列各式的证明序列

1. $\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \beta$
2. $\alpha \vdash \beta \to \alpha$
3. $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \gamma$

例13(1)的证明

1. $\alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \beta$

证：

(1) $\alpha\to\beta,\ \alpha \vdash \alpha\to\beta$ $\qquad(\in)$

(2) $\alpha\to\beta,\ \alpha \vdash \alpha$ $\qquad(\in)$

(3) $\alpha\to\beta,\ \alpha \vdash \beta$ $\qquad(\to -)(1)(2)$

例13(2)的证明

2. $\alpha \vdash \beta \to \alpha$

证：

(1) $\alpha, \ \beta \vdash \alpha$ $\qquad$ $(\in)$

(2) $\alpha \vdash \beta \to \alpha$ $\quad$ $(\to +)(1)$

例13(3)的证明

3. $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \gamma$

证:

(1) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \alpha$ $\quad(\in)$

(2) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \alpha \to \beta$ $\quad(\in)$

(3) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \beta$ $\quad(\to -)(1)(2)$

(4) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$ $\quad(\in)$

(5) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \beta \to \gamma$ $\quad(\to -)(1)(4)$

(6) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta,\ \alpha \vdash \gamma$ $\quad(\to -)(3)(5)$

(7) $\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \gamma$ $\quad(\to +)(6)$

证明序列的简单性质

1. 若$\Gamma \vdash_N \alpha$, 则Γ一定是一个有限公式集。

2. 若 $\Gamma_1 \vdash \alpha_1$, $\Gamma_2 \vdash \alpha_2$, $\cdots$, $\Gamma_n \vdash \alpha_n$ 是**N**中的一个证明序列, 则对任意自然数i $(1 \leq i \leq n)$,

   (a) 子序列 $\Gamma_1 \vdash \alpha_1$, $\Gamma_2 \vdash \alpha_2$, $\cdots$, $\Gamma_i \vdash \alpha_i$ 也是**N**中的一个证明序列.

   (b) $\Gamma_i \vdash_N \alpha_i$.

形式系统N的中心问题

对**N**的任意有限公式集Γ和公式α，$\Gamma \vdash_N \alpha$?

约定

在形式系统**N**确定前提下，为简便起见，我们常省去“在**N**中”一词.

增加前提律

定理5: 令Γ为有限公式集, α,β为公式.
若$\Gamma\vdash\alpha$, 则$\Gamma,\beta\vdash\alpha$.

证明思路: 既然$\Gamma,\beta\vdash\alpha$的前提比$\Gamma\vdash\alpha$ 的前提还要多, $\Gamma\vdash\alpha$的证明序列应该可以转化为 $\Gamma,\beta\vdash\alpha$的证明序列。怎么转化呢?

证: 因$\Gamma\vdash\alpha$, 则存在证明序列

$$\Gamma_1\vdash\alpha_1,\ \Gamma_2\vdash\alpha_2,\ \cdots,\ \Gamma_n\vdash\alpha_n \qquad (*)$$

满足$\Gamma_n=\Gamma$, $\alpha_n=\alpha$.

增加前提律的归纳证明 —— 奠基步骤

只要证:

$\quad$ 对任意k:$(1 \leq k \leq n)$, $\Gamma_k, \beta \vdash \alpha_k$成立 (**)

下对k归纳证之.

(1) 奠基步骤:

当$k = 1$时, $\Gamma_1 \vdash \alpha_1$是$(*)$的第一项, 故$\Gamma_1 \vdash \alpha_1$必然是应用$(\in)$得到的, 从而$\alpha_1 \in \Gamma_1$.

故$\alpha_1 \in \Gamma_1 \cup \{\beta\}$, 再由$(\in)$知: $\Gamma_1, \beta \vdash \alpha_1$.

增加前提律的归纳证明 —— 归纳步骤

(2) 归纳步骤: 归纳假设(**)对$< m$的所有k成立, 下面考察(**)在$k = m$时的情形.

(2.1) 若$\Gamma_m \vdash \alpha_m$是由($\in$)导出的, 类似(1)可证.

(2.2) 若$\Gamma_m \vdash \alpha_m$是由($\neg -$)导出, 则存在自然数i, $j < k$使得$\Gamma_i \vdash \alpha_i$、 $\Gamma_j \vdash \alpha_j$分别为$\Gamma_m, \neg\alpha_m \vdash \gamma$、 $\Gamma_m, \neg\alpha_m \vdash \neg\gamma$.
由归纳假设得: $\Gamma_i, \beta \vdash \alpha_i$, $\Gamma_j, \beta \vdash \alpha_j$,
即$\Gamma_m, \beta, \neg\alpha_m \vdash \gamma$, $\Gamma_m, \beta, \neg\alpha_m \vdash \neg\gamma$.
再由($\neg -$)知: $\Gamma_m, \beta \vdash \alpha_m$.

(2.3) 对于($\rightarrow -$), 类似(2.2)可证.

(2.4) 若$\Gamma_m \vdash \alpha_m$是由$(\to +)$导出，则α_m必为形如$\gamma_1 \to \gamma_2$的公式，且有自然数$i < m$使得:$\Gamma_i \vdash \alpha_i$为Γ_m，$\gamma_1 \vdash \gamma_2$. 由归纳假设知：Γ_m，β，$\gamma_1 \vdash \gamma_2$，再由$(\to +)$知：Γ_m，$\beta \vdash \gamma_1 \to \gamma_2$，即$\Gamma_m$，$\beta \vdash \alpha_m$.

(2.5) 若$\Gamma_m \vdash \alpha_m$是由$(\wedge-)$导出的，则存在自然数$i < k$使得：$\Gamma_i \vdash \alpha_i$为

$$\Gamma_m \vdash \alpha_m \wedge \gamma \text{或 } \Gamma_m \vdash \gamma \wedge \alpha_m.$$

由归纳假设得：Γ_m，$\beta \vdash \alpha_m \wedge \gamma$或 Γ_m，$\beta \vdash \gamma \wedge \alpha_m$. 不管哪种情形，都有$\Gamma_m$，$\beta \vdash \alpha_m$.

(2.6) 对于$(\wedge +)$类似可证.

(2.7) 若$\Gamma_m \vdash \alpha_m$是由($\vee-$)导出的，则$\Gamma_m = \Gamma' \cup \{\gamma_1 \vee \gamma_2\}$，且$\Gamma'$，$\gamma_1 \vdash \alpha_m$ 与Γ'，$\gamma_2 \vdash \alpha_m$ 在$(*)$中出现，且出现在$\Gamma_m \vdash \alpha_m$之前．其中：Γ'为一个有限公式集，γ_1，γ_2都是公式．由归纳假设知：Γ'，β，$\gamma_1 \vdash \alpha_m$且 Γ'，β，$\gamma_2 \vdash \alpha_m$．从而Γ'，$\beta, \gamma_1 \vee \gamma_2 \vdash \alpha_m$，即$\Gamma_m$，$\beta \vdash \alpha_m$.

(2.8) 对于($\vee+$)，类似(2.5)可证.

(2.9) 对于($\leftrightarrow -$)和($\leftrightarrow +$)，类似(2.2)可证.

归纳证毕，$(**)$成立，故$\Gamma_n, \beta \vdash \alpha_n$，即：$\Gamma, \beta \vdash \alpha$.

增加前提律的推论

推论3：设Γ，Γ'是有限公式集，α是公式.

若$\Gamma \vdash \alpha$，则$\Gamma, \Gamma' \vdash \alpha$.

常把增加前提律记作$(+)$.

传递律

定理6: 若$\Gamma \vdash \alpha_1$, $\Gamma \vdash \alpha_2$, $\ldots$, $\Gamma \vdash \alpha_n$,
且$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash \alpha$,
则$\Gamma \vdash \alpha$.

传递律常记为(Tr).

传递律的证明

证:

(1)	$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha$	(假设)
(2)	$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \to \alpha$	$(\to +)(1)$
(3)	$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{n-2} \vdash \alpha_{n-1} \to (\alpha_n \to \alpha)$	$(\to +)(2)$
	$\vdots$	
$(n+1)$	$\emptyset \vdash \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$	$(\to +)(n)$
$(n+2)$	$\Gamma \vdash \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$	$(+)$
$(n+3)$	$\Gamma \vdash \alpha_1$	(假设)
$(n+4)$	$\Gamma \vdash \alpha_2 \to \alpha_3 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$	$(\to -)$
$(n+5)$	$\Gamma \vdash \alpha_2$	(假设)
$(n+6)$	$\Gamma \vdash \alpha_3 \to \alpha_4 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$	$(\to -)$
	$\vdots$	
	$\Gamma \vdash \alpha_n \to \alpha$	$(\to -)$
	$\Gamma \vdash \alpha_n$	(假设)
	$\Gamma \vdash \alpha$	$(\to -)$

两个记号

(1) 以$\Gamma \vdash \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 记$\Gamma \vdash \alpha_1$且$\cdots$且$\Gamma \vdash \alpha_n$.

(2) 设Γ，Γ'都是有限公式集，以$\Gamma \dashv\vdash \Gamma'$记 $\Gamma \vdash \Gamma'$且$\Gamma' \vdash \Gamma$.

则

(1) 若$\Gamma \vdash \alpha_1, \cdots, \alpha_n$，且$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha$，则$\Gamma \vdash \alpha$

(2) 设Γ_1，Γ_2，$\cdots$，Γ_n，Γ 都是有限公式集，
若$\Gamma_1 \vdash \Gamma_2$，$\cdots$，$\Gamma_{n-1} \vdash \Gamma_n$，$\Gamma_n \vdash \Gamma$，
则$\Gamma_1 \vdash \Gamma$.

定理7

若$\alpha_1 \to \alpha_2 \vdash \alpha_3 \to \alpha_4$，且$\alpha_1 \vdash \alpha_2$，则$\alpha_3 \vdash \alpha_4$.

证:

(1)	$\alpha_1 \vdash \alpha_2$	(假设)
(2)	$\emptyset \vdash \alpha_1 \to \alpha_2$	$(\to +)(1)$
(3)	$\alpha_1 \to \alpha_2 \vdash \alpha_3 \to \alpha_4$	(假设)
(4)	$\emptyset \vdash \alpha_3 \to \alpha_4$	$(Tr)(2)(3)$
(5)	$\alpha_3 \vdash \alpha_3 \to \alpha_4$	$(+)(4)$
(6)	$\alpha_3 \vdash \alpha_3$	$(\in)$
(7)	$\alpha_3 \vdash \alpha_4$	$(\to -)(5)(6)$

例14 给出下列各式的形式证明

1. $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$.

2. 如果$\Gamma, \alpha \vdash \beta$, 且$\Gamma, \alpha \vdash \neg\beta$, 则$\Gamma \vdash \neg\alpha$.

3. $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$.

4. $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$.

其中(2)称为归缪律, 记为$(\neg+)$.

例14(1)的形式证明

1. $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$.

证:

(1)	$\neg\neg\alpha,\ \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	$(\in)$
(2)	$\neg\neg\alpha,\ \neg\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	$(\in)$
(3)	$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	$(\neg -)(1)(2)$

例14(2)的形式证明

2. 如果$\Gamma, \alpha \vdash \beta$, 且$\Gamma, \alpha \vdash \neg\beta$, 则$\Gamma \vdash \neg\alpha$.

证:

(1)	$\Gamma, \neg\neg\alpha \vdash \Gamma$	$(\in)$(注意约定记号)
(2)	$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	(1)
(3)	$\Gamma, \neg\neg\alpha \vdash \alpha$	$(+)$(2)
(4)	$\Gamma, \alpha \vdash \beta$	(假设)
(5)	$\Gamma, \neg\neg\alpha \vdash \beta$	(Tr)(1)(3)(4)
(6)	$\Gamma, \alpha \vdash \neg\beta$	(假设)
(7)	$\Gamma, \neg\neg\alpha \vdash \neg\beta$	(Tr)(1)(3)(6)
(8)	$\Gamma \vdash \neg\alpha$	$(\neg -)$(5)(7)

例14(3)的形式证明

3. $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$.

证:

(1)	$\alpha,\ \neg\alpha \vdash \alpha$	$(\in)$
(2)	$\alpha,\ \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	$(\in)$
(3)	$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	本例之(2.)

例14(4)的形式证明

4. $\alpha,\ \neg\alpha \vdash \beta$.

证:

(1)	$\alpha,\ \neg\alpha,\ \neg\beta \vdash \alpha$	$(\in)$
(2)	$\alpha,\ \neg\alpha,\ \neg\beta \vdash \neg\alpha$	$(\in)$
(3)	$\alpha,\ \neg\alpha \vdash \beta$	$(\neg-)(1)(2)$

例15 给出下列各式的形式证明

1. $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$

2. $\alpha \rightarrow \neg \beta \vdash \beta \rightarrow \neg \alpha$

3. $\neg \alpha \rightarrow \beta \vdash \neg \beta \rightarrow \alpha$

4. $\neg \alpha \rightarrow \neg \beta \vdash \beta \rightarrow \alpha$

只证2. 和4.

例15(2)的证明

2. $\alpha \rightarrow \neg\beta \vdash \beta \rightarrow \neg\alpha$.

证:

(1) $\alpha \rightarrow \neg\beta,\ \beta,\ \alpha \vdash \alpha$ $(\in)$

(2) $\alpha \rightarrow \neg\beta,\ \beta,\ \alpha \vdash \alpha \rightarrow \neg\beta$ $(\in)$

(3) $\alpha \rightarrow \neg\beta,\ \beta,\ \alpha \vdash \neg\beta$ $(\rightarrow -)(1)(2)$

(4) $\alpha \rightarrow \neg\beta,\ \beta,\ \alpha \vdash \beta$ $(\in)$

(5) $\alpha \rightarrow \neg\beta,\ \beta \vdash \neg\alpha$ $(\neg +)(3)(4)$

(6) $\alpha \rightarrow \neg\beta \vdash \beta \rightarrow \neg\alpha$ $(\rightarrow +)(5)$

例15(4)的证明

4. $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta \vdash \beta\rightarrow\alpha$.

证:

$(1)\ \neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\ \beta,\ \neg\alpha \vdash \neg\alpha \qquad (\in)$

$(2)\ \neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\ \beta,\ \neg\alpha \vdash \neg\alpha\rightarrow\neg\beta \qquad (\in)$

$(3)\ \neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\ \beta,\ \neg\alpha \vdash \neg\beta \qquad (\rightarrow -)(1)(2)$

$(4)\ \neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\ \beta,\ \neg\alpha \vdash \beta \qquad (\in)$

$(5)\ \neg\alpha\rightarrow\neg\beta,\ \beta \vdash \alpha \qquad (\neg -)(3)(4)$

$(6)\ \neg\alpha\rightarrow\neg\beta \vdash \beta\rightarrow\alpha \qquad (\rightarrow +)(5)$

例16 给出下列各式的形式证明

1. $\neg\alpha\rightarrow\alpha\vdash\alpha$.

2. $\alpha\rightarrow\neg\alpha\vdash\neg\alpha$.

3. $\alpha\rightarrow\beta,\ \alpha\rightarrow\neg\beta\vdash\neg\alpha$.

4. $\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\beta\vdash\beta$.

5. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\vdash\alpha$.

6. $\neg(\alpha\rightarrow\beta)\vdash\neg\beta$.

证：只证1．4．5．

例16(1)的证明

1. $\neg\alpha\rightarrow\alpha\vdash\alpha$.

证:

(1) $\neg\alpha\rightarrow\alpha,\ \neg\alpha\vdash\neg\alpha$ $(\in)$

(2) $\neg\alpha\rightarrow\alpha,\ \neg\alpha\vdash\neg\alpha\rightarrow\alpha$ $(\in)$

(3) $\neg\alpha\rightarrow\alpha,\ \neg\alpha\vdash\alpha$ $(\rightarrow -)$

(4) $\neg\alpha\rightarrow\alpha\vdash\alpha$ $(\neg -)(1)(3)$

例16(4)的证明

4. $\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\beta\vdash\beta.$

证:

$(1)\alpha\rightarrow\beta\vdash\neg\beta\rightarrow\neg\alpha$ (例15之1)

$(2)\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\beta\vdash\neg\beta\rightarrow\neg\alpha$ $(+)(1)$

$(3)\neg\alpha\rightarrow\beta\vdash\neg\beta\rightarrow\alpha$ (例15之3)

$(4)\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\beta\vdash\neg\beta\rightarrow\alpha$ $(+)(3)$

$(5)\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\beta\vdash\neg\beta$ $(\in)$

$(6)\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\beta\vdash\neg\alpha$ $(\rightarrow-)(2)(5)$

$(7)\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\beta\vdash\alpha$ $(\rightarrow-)(4)(5)$

$(8)\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\alpha\rightarrow\beta\ \vdash\beta$ $(\neg-)(6)(7)$

例16(5)的证明

5. $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \alpha$.

证:

$(1)\ \neg(\alpha \rightarrow \beta),\ \neg\alpha \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$ $\qquad (\in)$

$(2)\ \neg\alpha,\ \alpha \vdash \beta$ $\qquad$ (例14之4.)

$(3)\ \neg\alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$ $\qquad (\rightarrow +)(2)$

$(4)\ \neg(\alpha \rightarrow \beta),\ \neg\alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$ $\qquad (+)(3)$

$(5)\ \neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \alpha$ $\qquad (\neg -)(1)(4)$

作业

p.508(p.101). 13(1)(3)(5)

9

10

谢　谢

例17 给出下列各式的形式证明

1. $\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \alpha,\ \beta$.
2. $\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \beta \wedge \alpha$.
3. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash\dashv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.
4. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \alpha \rightarrow \neg\beta$.
5. $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash\dashv \alpha \wedge \neg\beta$.
6. $\emptyset \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.

例17(1)的证明

1. $\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \alpha,\ \beta.$

证:

$(\vdash)$

(1)	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	$(\in)$
(2)	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha,\ \beta$	$(\wedge-)$

$(\dashv)$

(1)	$\alpha, \beta \vdash \alpha$	$(\in)$
(2)	$\alpha, \beta \vdash \beta$	$(\in)$
(3)	$\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	$(\wedge+)$

例17(2)的证明

2. $\alpha \wedge \beta \vdash\dashv \beta \wedge \alpha$.

证:

($\vdash$)

(1)	$\alpha \wedge \beta \vdash \beta, \alpha$	(本例之1.)
(2)	$\alpha \wedge \beta \vdash \beta \wedge \alpha$	($\wedge -$)

($\dashv$) 同理可证。

例17(3)的证明

3. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash\dashv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

证:

($\vdash$)

(1)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash \gamma$	(1.)
(2)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash \alpha \wedge \beta$	(1.)
(3)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash \alpha$	$(\wedge-)(2)$
(4)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash \beta$	$(\wedge-)(2)$
(5)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash (\beta \wedge \gamma)$	$(\wedge+)(4)(1)$
(6)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	$(\wedge+)(3)(5)$

例17(3)的证明(续)

3. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \vdash\dashv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

证:

$(\dashv)$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \vdash (\beta \wedge \gamma) \wedge \alpha & (2.) \\
(2) & (\beta \wedge \gamma) \wedge \alpha \vdash \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) & (\vdash) \\
(3) & \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) \vdash (\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta & (2.) \\
(4) & (\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta \vdash \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) & (\vdash) \\
(5) & \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) \vdash (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma & (2.) \\
(6) & \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \vdash (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma & (Tr)
\end{array}
$$

当然$(\dashv)$也可仿$(\vdash)$证得.

例17(4)的证明

4. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \alpha \rightarrow \neg \beta$.

证:

($\vdash$)

(1)	$\neg(\alpha \wedge \beta),\ \alpha,\ \beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	$(\in)$
(2)	$\alpha,\ \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	(1.)
(3)	$\neg(\alpha \wedge \beta),\ \alpha,\ \beta \vdash (\alpha \wedge \beta)$	$(+)(2)$
(4)	$\neg(\alpha \wedge \beta),\ \alpha \vdash \neg \beta$	$(\neg +)(1)(3)$
(5)	$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \alpha \rightarrow \neg \beta$	$(\rightarrow +)(4)$

例17(4)的证明(续)

4. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \alpha \rightarrow \neg \beta$.

证:

($\dashv$)

(1)	$\alpha \rightarrow \neg \beta, \alpha \wedge \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	$(\in)$
(2)	$\alpha \rightarrow \neg \beta,\ \alpha \wedge \beta \vdash \alpha$	$(\wedge)(1)$
(3)	$\alpha \rightarrow \neg \beta,\ \alpha \wedge \beta \vdash \beta$	$(\wedge)(1)$
(4)	$\alpha \rightarrow \neg \beta,\ \alpha \wedge \beta \vdash \alpha \rightarrow \neg \beta$	$(\in)$
(5)	$\alpha \rightarrow \neg \beta,\ \alpha \wedge \beta \vdash \neg \beta$	$(\rightarrow -)(2)(4)$
(6)	$\alpha \rightarrow \neg \beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	$(\neg +)(3)(5)$

例17(5)的证明

5. $\neg(\alpha\to\beta) \vdash\dashv \alpha\wedge\neg\beta$.

证:

$(\vdash)$

(1) $\beta,\ \alpha\vdash\beta$ $(\in)$

(2) $\beta\vdash\alpha\to\beta$ $(\to+)$(1)

(3) $\beta\to(\alpha\to\beta)\vdash\neg(\alpha\to\beta)\to\neg\beta$ (例15之1.)

(4) $\neg(\alpha\to\beta)\vdash\neg\beta$ (定理7)(2)(3)

(5) $\neg\alpha,\ \alpha\vdash\beta$ (例14之4.)

(6) $\neg\alpha\vdash\alpha\to\beta$ $(\to+)$(5)

(7) $\neg\alpha\to(\alpha\to\beta)\vdash\neg(\alpha\to\beta)\to\alpha$ (例15之3.)

(8) $\neg(\alpha\to\beta)\vdash\alpha$ (定理7)(6)(7)

(9) $\neg(\alpha\to\beta)\vdash\alpha\wedge\neg\beta$ $(\wedge+)$

例17(5)的证明(续)

5. $\neg(\alpha \to \beta) \dashv\vdash \alpha \land \neg\beta$.

证:

$(\dashv)$

(1)	$\alpha,\ \neg\beta,\ \alpha\to\beta \vdash \alpha$	$(\in)$
(2)	$\alpha,\ \neg\beta,\ \alpha\to\beta \vdash \alpha\to\beta$	$(\in)$
(3)	$\alpha,\ \neg\beta,\ \alpha\to\beta \vdash \beta$	$(\to -)$
(4)	$\alpha,\ \neg\beta,\ \alpha\to\beta \vdash \neg\beta$	$(\in)$
(5)	$\alpha,\ \neg\beta \vdash \neg(\alpha\to\beta)$	$(\neg +)$
(6)	$\alpha\land\neg\beta \vdash \alpha,\ \neg\beta$	(1.)
(7)	$\alpha\land\neg\beta \vdash \neg(\alpha\to\beta)$	(Tr)

思考题：怎么用$\alpha\land\neg\beta$, $\neg(\alpha\to\beta)$ 作为前提直接证明。

例17(6)的证明

6. $\emptyset \vdash \neg(\alpha \wedge \neg \alpha)$.

证:

(1) $\alpha \wedge \neg \alpha \vdash \alpha$ (1.)

(2) $\alpha \wedge \neg \alpha \vdash \neg \alpha$ (1.)

(3) $\emptyset \vdash \neg(\alpha \wedge \neg \alpha)$ $(\neg +)$

例18 给出下列各式的形式证明

1. $\alpha \vdash \alpha \vee \beta,\ \beta \vee \alpha$
2. $\alpha \vee \beta \vdash\dashv \beta \vee \alpha$
3. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \vdash\dashv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
4. $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
5. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \vee \neg\beta$
6. $\alpha \vee \beta \vdash\dashv \neg\alpha \rightarrow \beta$
7. $\alpha \rightarrow \beta \vdash\dashv \neg\alpha \vee \beta$
8. $\emptyset \vdash \alpha \vee \neg\alpha.$

例18(1)的证明

1. $\alpha \vdash \alpha \vee \beta,\ \beta \vee \alpha$

证:

(1) $\alpha \vdash \alpha$ $(\in)$

(2) $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ $(\vee +)$

(3) $\alpha \vdash \beta \vee \alpha$ $(\vee +)$

例18(2)的证明

2. $\alpha \vee \beta \dashv\vdash \beta \vee \alpha$

证:

$(\vdash)$

(1)	$\alpha \vdash \beta \vee \alpha$	(本例之1.)
(2)	$\beta \vdash \beta \vee \alpha$	(本例之1.)
(3)	$\alpha \vee \beta \vdash \beta \vee \alpha$	$(\vee -)(1)(2)$

$(\dashv)$ 同理可证。

例18(3)的证明

3. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \vdash\dashv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$

证:

$(\vdash)$

(1)	$\gamma \vdash \beta \vee \gamma$	(1.)
(2)	$\gamma \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	(1.)
(3)	$\alpha \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	(1.)
(4)	$\beta \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	与(2)类似
(5)	$\alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	$(\vee -)$(3)(4)
(6)	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	$(\vee -)$(2)(5)

$(\dashv)$ 同理可证。也可用$(\vdash)$结合本例之2证得。

例18(4)的证明

4. $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$

证($\vdash$):

(1)	$\alpha \vdash \alpha \vee \beta$	(1.)
(2)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha$	(定理7及例15)
(3)	$\beta \vdash \alpha \vee \beta$	(1.)
(4)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\beta$	(同(2))
(5)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$	($\wedge$+)(2)(4)

例18(4)的证明(续一)

4. $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$

另证($\vdash$):

(1)	$\neg(\alpha \vee \beta), \alpha \vdash \alpha$	$(\in)$
(2)	$\neg(\alpha \vee \beta), \alpha \vdash \alpha \vee \beta$	$(\vee+)(1)$
(3)	$\neg(\alpha \vee \beta), \alpha \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$	$(\in)$
(4)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha$	$(\neg+)(2)(3)$
(5)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\beta$	(同(4))
(6)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$	$(\wedge+)(4)(5)$

例18(4)的证明(续二)

4. $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$

证($\dashv$):

(1)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg\alpha$	(例17)
(2)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \alpha \vdash \neg\alpha$	$(+)(1)$
(3)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \alpha \vdash \alpha$	$(\in)$
(4)	$\neg\alpha,\ \alpha \vdash \beta$	(例14)
(5)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \alpha \vdash \beta$	$(Tr)(2)(3)(4)$
(6)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \beta \vdash \beta$	$(\in)$
(7)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \alpha \vee \beta \vdash \beta$	$(\vee-)(5)(6)$
(8)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg\beta$	(例17)
(9)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \alpha \vee \beta \vdash \neg\beta$	$(+)(8)$
(10)	$\neg\alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$	$(\neg+)(7)(9)$

例18(5)的证明

5. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \vee \neg\beta$

证($\vdash$):

(1) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$ (1)

(2) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \alpha$ (定理7及例15)

(3) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \beta$ 类似(2)

(4) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \alpha \wedge \beta$ ($\wedge$+)(2)(3)

(5) $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$ (定理7)

例18(5)的证明(续一)

5. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \vee \neg\beta$

另证($\vdash$):

(1) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$	(本例之4)
(2) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \neg\neg\alpha$	$(\wedge-)(1)$
(3) $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	(例14之1)
(4) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \alpha$	$(Tr)(2)(3)$
(5) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \beta$	同理
(6) $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \alpha \wedge \beta$	$(\wedge+)(4)(5)$
(7) $\neg(\alpha \wedge \beta), \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \alpha \wedge \beta$	$(+)(6)$
(8) $\neg(\alpha \wedge \beta), \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	$(\in)$
(9) $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$	$(\neg-)(7)(8)$

例18(5)的证明(续二)

5. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash\dashv \neg\alpha \vee \neg\beta$

证($\dashv$):

(1)	$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$	(例17)
(2)	$\neg\alpha \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	(定理7)
(3)	$\neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	类似(2)
(4)	$\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$	($\vee-$)

例18(6)的证明

6. $\alpha \vee \beta \dashv\vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$

证($\vdash$):

(1)	$\alpha,\ \neg\alpha \vdash \beta$	(例14之4)
(2)	$\alpha \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$	$(\rightarrow +)(1)$
(3)	$\beta \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$	(例13之2)
(4)	$\alpha \vee \beta \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$	$(\vee -)(2)(3)$

例18(6)的证明(续)

6. $\alpha \vee \beta \vdash\dashv \neg \alpha \rightarrow \beta$

证($\dashv$):

(1)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \alpha \wedge \neg \beta$	(本例之4.)
(2)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \alpha$	$(\wedge -)$
(3)	$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \beta$	$(\wedge -)$
(4)	$\neg \alpha \rightarrow \beta,\ \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \alpha$	$(+)(3)$
(5)	$\neg \alpha \rightarrow \beta,\ \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg \alpha \rightarrow \beta$	$(\in)$
(6)	$\neg \alpha \rightarrow \beta,\ \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \beta$	$(\rightarrow -)(4)(5)$
(7)	$\neg \alpha \rightarrow \beta,\ \neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\beta$	$(+)(3)$
(8)	$\neg \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \vee \beta$	$(\neg -)(6)(7)$

例18(7)的证明

7. $\alpha \rightarrow \beta \dashv\vdash \neg\alpha \vee \beta$

证($\vdash$):

(1)	$\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \neg\neg\alpha \wedge \beta$	(本例之4)
(2)	$\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \neg\neg\alpha$	$(\wedge -)$
(3)	$\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \neg\beta$	$(\wedge -)$
(4)	$\alpha \rightarrow \beta, \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \neg\neg\alpha$	$(+)(2)$
(5)	$\alpha \rightarrow \beta, \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \neg\beta$	$(+)(3)$
(6)	$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	(例14之1)
(7)	$\alpha \rightarrow \beta, \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \alpha$	$(Tr)(4)(6)$
(8)	$\alpha \rightarrow \beta, \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$	$(\in)$
(9)	$\alpha \rightarrow \beta, \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vdash \beta$	$(\rightarrow -)(7)(8)$
(10)	$\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$	$(\neg -)(5)(9)$

例18(7)的证明(续一)

7. $\alpha \to \beta \vdash\dashv \neg\alpha \vee \beta$

另证($\vdash$):

(1)	$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	(例14)
(2)	$\alpha \to \beta,\ \neg\neg\alpha \vdash \alpha$	$(+)(1)$
(3)	$\alpha \to \beta,\ \neg\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$	$(\in)$
(4)	$\alpha \to \beta,\ \neg\neg\alpha \vdash \beta$	$(\to -)(2)(3)$
(5)	$\alpha \to \beta \vdash \neg\neg\alpha \to \beta$	$(\to +)(4)$
(6)	$\neg\neg\alpha \to \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$	(本例之6)
(7)	$\alpha \to \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$	$(Tr)(5)(6)$

例18(7)的证明(续二)

7. $\alpha \to \beta \vdash\dashv \neg\alpha \vee \beta$

证($\dashv$):

(1)	$\neg\alpha \vee \beta \vdash \neg\neg\alpha \to \beta$	(本例之6)
(2)	$\neg\alpha \vee \beta,\ \alpha \vdash \neg\neg\alpha \to \beta$	$(+)(1)$
(3)	$\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	(例14之3)
(4)	$\neg\alpha \vee \beta,\ \alpha \vdash \neg\neg\alpha$	$(+)(3)$
(5)	$\neg\alpha \vee \beta,\ \alpha \vdash \beta$	$(\to -)(2)(4)$
(6)	$\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$	$(\to +)(5)$

例18(7)的证明(续三)

7. $\alpha \to \beta \vdash\dashv \neg\alpha \vee \beta$

另证($\dashv$):

(1)	$\neg\alpha, \alpha \vdash \beta$	(例14之4)
(2)	$\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$	$(\to +)(1)$
(3)	$\beta, \alpha \vdash \beta$	$(\in)$
(4)	$\beta \vdash \alpha \to \beta$	$(\to +)(3)$
(5)	$\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$	$(\vee -)(2)(4)$

例18(8)的证明

8. $\emptyset \vdash \alpha \vee \neg \alpha$

证:

(1) $\neg(\alpha \vee \neg \alpha) \vdash \neg \alpha \wedge \neg\neg \alpha$ (本例之4)

(2) $\neg \alpha \wedge \neg\neg \alpha \vdash \neg \alpha, \ \neg\neg \alpha$ (例17之1)

(3) $\neg(\alpha \vee \neg \alpha) \vdash \neg \alpha, \ \neg\neg \alpha$ (Tr)

(4) $\emptyset \vdash \alpha \vee \neg \alpha$ $(\neg -)(3)$

例19

证明: $\alpha\leftrightarrow\beta \dashv\vdash (\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)$

证($\vdash$):

(1)	$\alpha\leftrightarrow\beta,\ \alpha\vdash\alpha$	$(\in)$
(2)	$\alpha\leftrightarrow\beta,\ \alpha\vdash\alpha\leftrightarrow\beta$	$(\in)$
(3)	$\alpha\leftrightarrow\beta,\ \alpha\vdash\beta$	$(\leftrightarrow -)$
(4)	$\alpha\leftrightarrow\beta\vdash\alpha\rightarrow\beta$	$(\rightarrow +)(3)$
(5)	$\alpha\leftrightarrow\beta\vdash\beta\rightarrow\alpha$	(类似(4))
(6)	$\alpha\leftrightarrow\beta\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)$	$(\wedge+)(4)(5)$

例19(续)

证明: $\alpha \leftrightarrow \beta \vdash\!\dashv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

证($\dashv$):

(1) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \vdash \alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \alpha$ (例17)

(2) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha),\ \alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$ $(+)(1)$

(3) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha),\ \alpha \vdash \alpha$ $(\in)$

(4) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha),\ \alpha \vdash \beta$ $(\in)$

(5) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha),\ \beta \vdash \alpha$ (类似(4))

(6) $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ $(\leftrightarrow +)(4)(5)$

定理8

对于任意公式α，α_1，α_2，$\cdots$，α_n.

1. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha \Longleftrightarrow$
   $\emptyset \vdash \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_{n-1} \to \alpha_n \to \alpha$

2. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha \Longleftrightarrow$
   $\emptyset \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \to \alpha$

证1($\Rightarrow$): 多次使用($\to +$)易证.

定理8的证明

证1($\Leftarrow$):

$$\emptyset \vdash \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \ldots \to (\alpha_n \to \alpha)\cdots)$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \cdots \to (\alpha_n \to \alpha)\cdots)$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_1$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_2 \to (\alpha_3 \to \cdots \to (\alpha_n \to \alpha)\cdots)$$

$\vdots$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_n \to \alpha$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha_n$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n \vdash \alpha$$

定理8的证明(续一)

证2(⇒):

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vdash \alpha_1$$

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vdash \alpha_2$$

$\vdots$

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vdash \alpha_n$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha$$

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \vdash \alpha$$

$$\emptyset \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha$$

定理8的证明(续二)

证2($\Leftarrow$):

$$\emptyset \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha_1$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha_2$$

$\vdots$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha_n$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \vdash \alpha$$

定理8的意义

定义2.14(可证公式): 若$\emptyset \vdash_N \alpha$, 则称$\alpha$为**N**的一个可证公式或内定理，记为$\vdash_N \alpha$，在不引起混淆情况下，也简记为$\vdash \alpha$.

定理2.8说明: 任何一个有前提的形式推演关系都可转化为与之等价的没有前提的形式推演关系。
即：任何一个形式推演关系都可化为一个与之等价的可证式.

作业

p.508(p.101).　11(3), (6)

11(1), (2), (5)

12(4), (6), (8)

13(2), (7), (10), (12),(14)

谢　谢