一阶模态逻辑系统K+BF的完备性

孙梅莹

April 25, 2012

涉及内容

- 一阶模态逻辑的语言;
- 一阶模态逻辑的语法;
- 一阶模态逻辑的语义;
- 一阶模态逻辑系统K+BF的公理系统;
- 一阶模态逻辑系统K+BF的完备性.

一阶模态逻辑的语言

一阶模态逻辑语言L含有下列符号:

- 常量符号: $c_0, c_1, \ldots;$
- 谓词符号: $p_0, p_1, \ldots;$
- 变量符号: $x_0, x_1, \ldots;$
- 逻辑联结词和量词符号: $\neg, \rightarrow, \forall;$
- 模态词: $\Box;$
- 辅助符号: $(,).$

一阶模态逻辑的语法

项定义如下:

$$t ::= c|x.$$

公式定义如下:

$$\varphi ::= p(t_1, ..., t_n)|\neg\varphi_1|\varphi_1 \to \varphi_2|\forall x\varphi_1(x)|\Box\varphi_1,$$

其中p是一个n元谓词符号, $t_1, ..., t_n$是项.

一阶模态逻辑的语义: 模型

模型$\mathbf{M}$是一个四元组(W, R, U, I), 其中
- W是一个可能世界的集合;
- $R \subseteq W^2$是可达关系;
- U是论域;
- I是一个解释使得对于任意的常量符号c, 有$I(c, w) \in U$; 并且对于任意的n元谓词符号p, $I(p, w) \subseteq U^n$.

我们考虑的是常论域语义. 它的论域不随可能世界的变化而变化. 论域随可能世界的变化而变化的语义我们称为可变论域语义.

赋值v是X到U的函数, 其中X是所有的变量的集合.

项在解释和赋值下以及可能世界中对应的元素

设t是一个项，设$t^{I,v,w}$是t在解释I和赋值v下,在可能世界w中所对应于U中的元素，则

$$t^{I,v,w} = \begin{cases} I(c,w) & \text{if } t = c \\ v(x) & \text{if } t = x \end{cases}$$

公式在模型中的真假值

给定一个模型$\mathbf{M}$和一个赋值v, 对于任意的可能世界w有

$$
\mathbf{M}, v, w \models \varphi \\
\text{iff} \begin{cases}
(t_1^{I,v,w}, \ldots, t_n^{I,v,w}) \in I(p, w) & \text{if } \varphi = p(t_1, \ldots, t_n) \\
\mathbf{M}, v, w \not\models \varphi_1 & \text{if } \varphi = \neg\varphi_1 \\
\mathbf{M}, v, w \models \varphi_1 \Rightarrow \mathbf{M}, v, w \models \varphi_2 & \text{if } \varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \\
\mathbf{A}a \in U(\mathbf{M}, v(x/a), w \models \varphi_1) & \text{if } \varphi = \forall x \varphi_1(x) \\
\mathbf{A}w'((w, w') \in R \Rightarrow \mathbf{M}, v, w' \models \varphi_1) & \text{if } \varphi = \Box\varphi_1
\end{cases}
$$

其中$v(x/a)$定义如下, 对于任意的变量y

$$
v(x/a)(y) = \begin{cases} v(y) & \text{if } y \neq x \\ a & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

公式在模型，框架和框架类中的有效性

一个公式φ在一个模型**M**中是有效的，记为$\mathbf{M} \models \varphi$，当且仅当$\varphi$在**M**的所有的可能世界中以及在所有的赋值$v$下都为真.

一个公式φ在一个框架**F**中是有效的，记为$\mathbf{F} \models \varphi$，当且仅当$\varphi$在基于此框架的所有模型中都是有效的.

给定一个框架类**C**，一个公式φ在**C**中是有效的当且仅当φ在**C**的每个框架中是有效的.

逻辑推论

给定一个公式集合Γ和一个公式φ, φ称为是Γ的C逻辑推论,记为

$$\Gamma \models_C \varphi,$$

如果对于任意的框架$\mathbf{F} \in C$, $\mathbf{F} \models \Gamma$蕴涵$\mathbf{F} \models \varphi$.

我们主要讲述K系统, 因此我们将$\Gamma \models_C \varphi$简记为$\Gamma \models \varphi$.

一阶模态系统K+BF的公理系统

公理(模式):

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_1)\\
&(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_3))\\
&(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\neg\varphi_2 \to \neg\varphi_1)\\
&\forall x\varphi_1(x) \to \varphi_1(t)\\
&\forall x(\varphi_1(x) \to \varphi_2(x)) \to (\forall x\varphi_1(x) \to \forall x\varphi_2(x))\\
&\Box(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\Box\varphi_1 \to \Box\varphi_2)\\
&\forall x\Box\varphi_1 \to \Box\forall x\varphi_1
\end{aligned}
$$

最后一条公理我们称为巴肯公式(Barcan Formula, 简称为**BF**). 在任何一个**BF**有效的框架中论域关于可能世界是递减的, 因为我们讨论的是常论域语义, 所以**BF**是有效的. 但**BF**不能由前面的六条公理推出, 因此我们把**BF**作为一条公理. $\Box\forall x\varphi_1 \to \forall x\Box\varphi_1$我们称为逆巴肯公式(简称为**CBF**). 在任何一个**CBF**有效的框架中论域关于可能世界是递增的, 它在常论域模型中是有效的. 但**CBF**可由前面的六条公理推出, 因此我们不把**CBF**作为一条公理.

一阶模态系统K+BF的公理系统

推导规则:

$$\text{MP} \quad \frac{\varphi_1, \varphi_1 \to \varphi_2}{\varphi_2}$$

$$\text{UG} \quad \frac{\varphi_1}{\forall x \varphi_1}$$

$$\text{N} \quad \frac{\varphi_1}{\Box \varphi_1}$$

在K+BF的公理系统中加入相应的公理我们可以得到一阶模态系统S+BF, 其中S为命题模态系统K, D, T, B, S4或S5.

一阶模态系统K+BF的公理证明和定理

公式序列$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$是一个公理证明，如果对于每个$i$，要么$\varphi_i$是一个公理，要么$\varphi_i$是由前面若干个公式应用推导规则得到的.

公式φ是K+BF的公理定理，记为$\vdash \varphi$，如果存在一个K+BF的公理证明$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$使得$\varphi = \varphi_n$.

一个理论的公理证明和定理

公式序列$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$是$\Gamma$的一个公理证明，如果对于每个$i$，要么$\varphi_i$是一个公理，要么$\varphi_i \in \Gamma$，要么$\varphi_i$是由前面若干个公式应用推导规则得到的.

给定理论Γ，公式φ是Γ的公理定理，记为$\Gamma \vdash \varphi$，如果存在Γ的一个公理证明$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$使得$\varphi = \varphi_n$.

一阶逻辑的几个定理

后面证明中需要用到下面的几个一阶逻辑的定理LPC1–LPC3，它们也是系统S+BF的定理，在这里我们省略LPC1–LPC3的证明.

LPC1	$\forall x \varphi \leftrightarrow \varphi$	x不在φ中自由出现
LPC2	$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$	x不在φ中自由出现
LPC3	$\exists y(\varphi(x/y)) \to \forall x \varphi)$	y不在$\forall x \varphi$中自由出现

K+BF的导出规则

由系统K+BF的公理系统我们可以得到下面的导出规则**DR**:

$$\frac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi}$$

证明

(1)	$\varphi \to \psi$	前提
(2)	$\Box(\varphi \to \psi)$	(1) $\times$ N
(3)	$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	**K**
(4)	$\Box\varphi \to \Box\psi$	(2), (3)$\times$ MP

CBF在一阶模态系统S+BF中的证明

CBF $\Box\forall x\varphi \rightarrow \forall x\Box\varphi$

证明

(1)	$\forall x\varphi \rightarrow \varphi$	公理
(2)	$\Box\forall x\varphi \rightarrow \Box\varphi$	(1)× **DR**
(3)	$\forall x(\Box\forall x\varphi \rightarrow \Box\varphi)$	(2)× UG
(4)	$\forall x(\Box\forall x\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow$ $(\Box\forall x\varphi \rightarrow \forall x\Box\varphi)$	LPC2
(5)	$\Box\forall x\varphi \rightarrow \forall x\Box\varphi$	(3)(4)×MP

语句

不含自由变量的公式我们称为语句(sentence).

命题1 假设$\mathbf{M} = (W, R, U, I)$是一个模型，任意的$w \in W$，$v_1, v_2$是两个赋值，并且$\varphi$是任意的公式．如果$v_1, v_2$在$\varphi$的所有自由变量上赋值相同，则有$\mathbf{M}, v_1, w \models \varphi$当且仅当$\mathbf{M}, v_2, w \models \varphi$.

证明 对公式φ的结构作归纳. □

推论2 假设$\mathbf{M} = (W, R, U, I)$是一个模型，并且任意的$w \in W$. 对于任意的语句$\varphi$，如果存在赋值$v$，使得$\mathbf{M}, v, w \models \varphi$，则对于每个赋值$v$，有$\mathbf{M}, v, w \models \varphi$.

一阶模态系统K+BF的可靠性定理

可靠性定理 对于任意的语句集合Γ和任意的语句φ, 如果$\Gamma \vdash \varphi$则$\Gamma \models \varphi$.

一阶模态系统K+BF的完备性定理

完备性定理 对于任意的语句集合Γ和任意的语句φ，如果$\Gamma \models \varphi$则$\Gamma \vdash \varphi$.

一阶模态系统K+BF的完备性证明的三个步骤

反证法: 假设$\Gamma \nvdash \varphi$. 则$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$是协调的. 证明大体分下面三个步骤:

1. 将$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$扩展成具有$\forall$-性质的极大协调语句的集合$w_0$.
2. 构造典型模型$\mathbf{M}$和赋值v, 使得对于任意的可能世界$w \in W$, w是具有$\forall$-性质的极大协调的语句集合, 以及任意的公式ψ, $\mathbf{M}, v, w \models \psi$当且仅当$\psi \in w$.
3. 由前面两步得到$\Gamma \not\models \varphi$, 与前提$\Gamma \models \varphi$矛盾.

$\forall$-性质

一阶逻辑完备性证明时要求一阶逻辑的公式集合具有见证性，同样一阶模态逻辑的公式集合也要有见证性，在这里我们定义为一阶模态逻辑的公式集合具有$\forall$-性质.

定义 一阶模态公式的集合Λ具有$\forall$-性质当且仅当对于每个只含一个自由变量的公式$\varphi(x)$，都存在某个常量c使得
$\varphi(c) \rightarrow \forall x \varphi(x) \in \Lambda$.

引理1

假设$\Gamma \nvdash \varphi$. 则$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$是协调的. 我们可以根据下面的引理1和Lindenbaum定理把$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$扩展成具有$\forall$-性质的极大协调集合$w_0$.

令

$$L^+ = L \cup \{b_0, b_1, b_2, \ldots\},$$

其中$\{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$是一个新的可数的常量的集合.

引理1 如果Λ是L上的一个协调的公式集合, 则存在L^+上的某个具有$\forall$-性质的协调的公式集合Δ, 使得$\Lambda \subseteq \Delta$.

假设引理1成立, 很容易证明如果Δ是一个具有$\forall$-性质的公式集合, 则任意的以Δ为子集的公式集合都具有$\forall$-性质.

引理1证明

证明 首先枚举L^+上的所有具有形式$\forall x\varphi(x)$的语句:

$$\forall x_0\varphi_0(x_0), \forall x_1\varphi_1(x_1), \forall x_2\varphi_2(x_2), \ldots$$

然后归纳定义公式集合序列$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$如下:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \Lambda, \\
\Delta_{n+1} &= \Delta_n \cup \{\varphi_n(c_n) \to \forall x_n\varphi_n(x_n)\},
\end{aligned}$$

其中c_n是$\{b_0, b_1, \ldots\}$中第一个不在Δ_n或$\varphi_n(x_n)$中出现的常量. 因为Δ_0在L中, 且Δ_n的形成只添加了n个公式, 因此在L^+中还有无限个常量没有被使用, c_n是存在的.

引理1证明

Δ_0是协调的. 我们证明如果Δ_n是协调的, 则 Δ_{n+1}也是协调的. 假设Δ_{n+1}不是协调的, 则有

$$\Delta_n \vdash \neg(\varphi_n(c_n) \rightarrow \forall x_n \varphi_n(x_n)).$$

所以有

$$\Delta_n \vdash \varphi_n(c_n)$$

且

$$\Delta_n \vdash \neg\forall x_n \varphi_n(x_n).$$

又因为c_n不在Δ_n中出现, 所以有

$$\Delta_n \vdash \forall y \varphi_n(y).$$

$$\Delta_n \vdash \forall y \varphi_n(y) \rightarrow \varphi_n(x_n).$$

引理1证明

$$\Delta_n \vdash \varphi_n(x_n).$$

$$\Delta_n \vdash \forall x_n \varphi_n(x_n).$$

这使得Δ_n不协调.
令

$$\Delta = \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n,$$

则Δ是协调的，且具有$\forall$-性质. 因为对于任意的只含有一个自由变量的公式$\varphi(x)$，都存在某个n使得$\varphi(x) = \varphi_n(x_n)$，所以存在$c_n$使得$\varphi_n(c_n) \to \forall x_n \varphi_n(x_n) \in \Delta_{n+1}$，所以有$\varphi_n(c_n) \to \forall x_n \varphi_n(x_n) \in \Delta$. $\square$

典型模型

Λ是任意的公式集合，我们定义

$$\Box^{-}(\Lambda) = \{\psi : \Box\psi \in \Lambda\}.$$

构造典型模型$\mathbf{M}$，使得对于任意的可能世界$w \in W$和任意的语句ψ，在某个赋值v下，有$\mathbf{M}, v, w \models \psi$当且仅当$\psi \in w$.

系统K+BF的典型模型$\mathbf{M}$是一个四元组(W, R, U, I)，其中
• W是由L^{+}中所有的具有$\forall$-性质的极大协调语句集合构成的集合；
• 对于任意的$w, w' \in W$，wRw'当且仅当对于任意的语句φ，如果$\Box\varphi \in w$，则$\varphi \in w'$，即$\Box^{-}(w) \subseteq w'$；
• U是由L^{+}中所有的常量构成的集合；
• 对于任意的常量c，有$I(c, w) = c$. $\langle t_1, ..., t_n \rangle \in I(p, w)$当且仅当$p(t_1, ..., t_n) \in w$.

我们令赋值v为对于每个变量x，$v(x) = c$，其中c为任意的常量.

引理2

对公式的结构作归纳时，当$\psi = \Box\psi_1$且$\Box\psi_1 \notin w$时，有$\neg\Box\psi_1 \in w$. 为了证明$\mathbf{M}, v, w \models \neg\Box\psi_1$，我们需找到$w$的一个可达的可能世界$w'$，使得$\mathbf{M}, v, w' \models \neg\psi_1$. w'由下面的引理2确保其存在性.

引理2 如果Γ是语言L^+中的一个具有$\forall$-性质的极大协调的语句的集合，并且γ是一个语句使得$\Box\gamma \notin \Gamma$，则存在语言L^+中的一个协调的语句的集合Δ,并且Δ具有$\forall$-性质使得 $\Box^-(\Gamma) \cup \{\neg\gamma\} \subseteq \Delta$.

假设引理2成立，根据Lindenbaum定理将Δ扩展成L^+中的极大协调的语句的集合Γ'. 很显然地：Γ'具有$\forall$-性质. 由R的定义知$\Gamma R \Gamma'$.

引理2证明

证明 首先枚举L^+中的所有具有形式$\forall x\varphi(x)$的语句:

$$\forall x_0\varphi_0(x_0), \forall x_1\varphi_1(x_1), \forall x_2\varphi_2(x_2), \ldots$$

然后归纳定义语句集合序列$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$如下:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{\neg\gamma\}, \\ \Delta_{n+1} &= \Delta_n \cup \{(\varphi_n(c) \to \forall x_n\varphi_n(x_n))\}, \end{aligned}$$

其中c是第一个满足(*)的常量.

(*) $\Box^-(\Gamma) \cup \Delta_{n+1}$是协调的.

引理2证明

我们需确保总是存在某个常量c满足(*). 首先$\Box^{-}(\Gamma) \cup \Delta_0$是协调的. 假设它不是协调的, 则有

$$\Box^{-}(\Gamma) \vdash \gamma.$$

所以存在$\{\psi_1, ..., \psi_k\} \subseteq \Box^{-}(\Gamma)$, 使得

$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k \vdash \gamma.$$

所以有

$$\vdash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k) \to \gamma.$$

由**DR**规则得到

$$\vdash \Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k) \to \Box\gamma.$$

所以

$$\vdash (\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_k) \to \Box\gamma.$$

引理2证明

又Γ是极大的，所以

$$(\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_k) \rightarrow \Box\gamma \in \Gamma.$$

因为

$$\Box\psi_1, \ldots, \Box\psi_k \in \Gamma,$$

并且Γ是极大的，所以

$$\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_k \in \Gamma.$$

所以

$$\Box\gamma \in \Gamma,$$

与$\Box\gamma \notin \Gamma$矛盾.

引理2证明

我们接下来需证明如果$\Box^-(\Gamma)\cup\Delta_n$是协调的，则总是存在某个常量$c$满足(*)．假设不存在常量$c$使得$\Box^-(\Gamma)\cup\Delta_{n+1}$是协调的，则对于$L^+$中的每个常量$c$都使得$\Box^-(\Gamma)\cup\Delta_{n+1}$不是协调的，所以有

$$\Box^-(\Gamma)\cup\Delta_n\vdash\neg(\varphi_n(c)\rightarrow\forall x_n\varphi_n(x_n)).$$

所以存在$\{\Box\psi_1,...,\Box\psi_k\}\subseteq\Gamma$以及$\{\gamma_1,...,\gamma_l\}\subseteq\Delta_n$使得

$$\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k\wedge\delta_n\vdash\neg(\varphi_n(c)\rightarrow\forall x_n\varphi_n(x_n)),$$

其中$\delta_n=\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_l$.
所以

$$\vdash(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k\wedge\delta_n)\rightarrow\neg(\varphi_n(c)\rightarrow\forall x_n\varphi_n(x_n)).$$

所以

$$\vdash(\psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k)\rightarrow(\delta_n\rightarrow\neg(\varphi_n(c)\rightarrow\forall x_n\varphi_n(x_n))).$$

由导出规则**DR**和定理**K3**得，

$$\vdash(\Box\psi_1\wedge\cdots\wedge\Box\psi_k)\rightarrow\Box(\delta_n\rightarrow\neg(\varphi_n(c)\rightarrow\forall x_n\varphi_n(x_n))).$$

引理2证明

又Γ是极大协调的，并且$\Box\psi_1, \dots, \Box\psi_k \in \Gamma$，因此$\Box(\delta_n \to \neg(\varphi_n(c) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \in \Gamma$. 这对每个常量$c$都成立. 令$y$是不在$\varphi_n(x_n)$和$\delta_n$中出现的变量,考虑$\forall y \Box(\delta_n \to \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n)))$. 因为$\Gamma$具有$\forall$-性质，所以存在某个常量$c'$使得

$$\Box(\delta_n \to \neg(\varphi_n(c') \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \to \\ \forall y \Box(\delta_n \to \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \in \Gamma.$$

引理2证明

我们已经有对于每个c, $\Box(\delta_n \to \neg(\varphi_n(c) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \in \Gamma$. 所以有

$$\Box(\delta_n \to \neg(\varphi_n(c') \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \in \Gamma.$$

因此有

$$\forall y \Box(\delta_n \to \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \in \Gamma.$$

又Γ是极大的, 由公理**BF**得

$$\Box \forall y(\delta_n \to \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \in \Gamma.$$

引理2证明

因为y不在δ_n中出现，由定理LPC2得

$$\begin{aligned}\vdash\quad & \forall y(\delta_n \to \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \to \\ & (\delta_n \to \forall y \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))),\end{aligned}$$

由**DR**得,

$$\begin{aligned}\vdash\quad & \Box\forall y(\delta_n \to \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \to \\ & \Box(\delta_n \to \forall y \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))),\end{aligned}$$

所以有

$$\Box(\delta_n \to \forall y \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \in \Gamma.$$

又

$$\begin{aligned}\vdash\quad & (\delta_n \to \forall y \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \to \\ & (\neg\forall y \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n)) \to \neg\delta_n),\end{aligned}$$

由**DR**得,

$$\begin{aligned}\vdash\quad & \Box(\delta_n \to \forall y \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n))) \to \\ & \Box(\neg\forall y \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n)) \to \neg\delta_n).\end{aligned}$$

引理2证明

所以

$$\Gamma \vdash \Box(\neg\forall y \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n)) \to \neg\delta_n).$$

由**K**公理和MP规则得，

$$\Gamma \vdash \Box\neg\forall y \neg(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n)) \to \Box\neg\delta_n$$

我们有定理LPC3，即

$$\vdash \exists y(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n)),$$

所以

$$\vdash \Box\exists y(\varphi_n(y) \to \forall x_n \varphi_n(x_n)).$$

因此有

$$\Gamma \vdash \Box\neg\delta_n,$$

又Γ是极大的，所以$\Box\neg\delta_n \in \Gamma$，所以$\neg\delta_n \in \Box^-(\Gamma)$，与$\Box^-(\Gamma) \cup \Delta_n$是协调的矛盾.

引理2证明

令

$$\Delta = \Box^{-}(\Gamma) \cup \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n.$$

因为对于每个n, $\Box^{-}(\Gamma) \cup \Delta_n$是协调的, 所以$\Delta$是协调的. 假设$\Delta$不是协调的. 则存在公式$\varphi$, 使得$\Delta \vdash \varphi$并且$\Delta \vdash \neg\varphi$. 从而存在公式集合$\Delta' \subseteq \Delta$, 使得$\Delta' \vdash \varphi$并且$\Delta' \vdash \neg\varphi$. 所以肯定存在某个$n$, 使得$\Delta' = \Box^{-}(\Gamma) \cup \Delta_n$, 所以$\Box^{-}(\Gamma) \cup \Delta_n$是不协调的. 由$\Delta$的构造知: Δ具有$\forall$-性质, 并且有$\Box^{-}(\Gamma) \cup \{\neg\gamma\} \subseteq \Delta$. $\Box$

典型模型的显著特点

定理3 对于任意的可能世界$w \in W$和任意的语句ψ, 在赋值v下, 有$\mathbf{M}, v, w \models \psi$当且仅当$\psi \in w$.

对ψ的结构归纳

证明 对ψ的结构作归纳.
情形1: $\psi = p(t_1, ..., t_n)$. $\mathbf{M}, v, w \models p(t_1, ..., t_n)$当且仅当$\langle t_1^{I,v,w}, ..., t_n^{I,v,w} \rangle \in I(p, w)$, 当且仅当$\langle t_1, ..., t_n \rangle \in I(p, w)$, 当且仅当 $p(t_1, ..., t_n) \in w$.
情形2: $\psi = \neg\psi_1$. $\mathbf{M}, v, w \models \neg\psi_1$当且仅当$\mathbf{M}, v, w \not\models \psi_1$, 当且仅当$\psi_1 \notin w$, 当且仅当$\neg\psi_1 \in w$.
情形3: $\psi = \psi_1 \to \psi_2$. $\mathbf{M}, v, w \models \psi_1 \to \psi_2$当且仅当 $\mathbf{M}, v, w \not\models \psi_1$或$\mathbf{M}, v, w \models \psi_2$, 当且仅当 $\psi_1 \notin w$或$\psi_2 \in w$, 当且仅当$\psi_1 \to \psi_2 \in w$.

对ψ的结构归纳

情形4: $\psi = \forall x \psi_1(x)$.
情形4.1: 假设$\forall x \psi_1(x) \in w$. 令$v(x/c)$是一个赋值, 其中$c \in U$且$c$是任意的常量. 由公理$\forall x \varphi_1(x) \to \varphi_1(t)$和$w$的极大性得到$\psi_1(c) \in w$. 因此$\mathbf{M}, v, w \models \psi_1(c)$. 所以$\mathbf{M}, v(x/c), w \models \psi_1(x)$. 又$c$是任意的论域中的元素, 所以有$\mathbf{M}, v, w \models \forall x \psi_1(x)$.
情形4.2: 假设$\forall x \psi_1(x) \notin w$. 则有$\neg \forall x \psi_1(x) \in w$. 又$w$具有$\forall$-性质, 因此存在某个常量$c$使得$\neg \psi_1(c) \in w$. 所以$\psi_1(c) \notin w$, 有$\mathbf{M}, v, w \not\models \psi_1(c)$. 又由公理$\forall x \varphi_1(x) \to \varphi_1(t)$的有效性得$\mathbf{M}, v, w \not\models \forall x \psi_1(x)$.

对ψ的结构归纳

情形5: $\psi = \Box\psi_1$.
情形5.1: 假设$\Box\psi_1 \in w$. 对于任意的w', 如果wRw', 则有$\psi_1 \in w'$, 所以有$\mathbf{M}, v, w' \models \psi_1$. 这对每个$w'$使得$wRw'$都成立. 所以, $\mathbf{M}, v, w \models \Box\psi_1$.
情形5.2: 假设$\Box\psi_1 \notin w$. 则有$\neg\Box\psi_1 \in w$. 根据引理2存在某个$w' \in W$使得wRw'且$\neg\psi_1 \in w'$. 所以有$\psi_1 \notin w'$. 由归纳假设得$\mathbf{M}, v, w' \not\models \psi_1$. 因为$wRw'$, 所以$\mathbf{M}, v, w \not\models \Box\psi_1$. $\Box$

完备性定理证明

由前面两步得到$\Gamma \not\models \varphi$, 与前提$\Gamma \models \varphi$矛盾.

完备性定理 对于任意的语句集合Γ和任意的语句φ, 如果$\Gamma \models \varphi$则$\Gamma \vdash \varphi$.

证明 如果$\Gamma \nvdash \varphi$. 则$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$是协调的. 我们把这个集合扩展成具有$\forall$-性质的极大协调语句集合$w_0$. 令$\mathbf{M} = (W, R, U, I)$是典型模型. 对于任意的语句$\psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, 有$\psi \in w_0$, 由定理3得$\mathbf{M}, v, w_0 \models \psi$. 所以有$\mathbf{M}, v, w_0 \models \Gamma$并且$\mathbf{M}, v, w_0 \models \neg\varphi$. 所以$\mathbf{M}, v, w_0 \not\models \varphi$ 因此有$\Gamma \not\models \varphi$, 与$\Gamma \models \varphi$矛盾. $\square$