命题模态逻辑K的完备性

孙梅莹

March 28, 2012

涉及内容

- 命题模态逻辑的语言;
- 命题模态逻辑的语法;
- 命题模态逻辑的语义;
- 命题模态逻辑K的公理系统;
- 命题模态逻辑K的完备性.

命题模态逻辑的语言

命题模态逻辑语言L包含下列符号:

- 命题变量: $p_0, p_1, \ldots$;
- 逻辑连接词: $\neg, \to$;
- 模态词: $\Box$;
- 辅助符号: (,).

命题模态逻辑的语法

公式定义如下:

$$\varphi ::= p | \neg\varphi_1 | \varphi_1 \to \varphi_2 | \Box\varphi_1.$$

逻辑连接词$\wedge$, $\vee$和$\leftrightarrow$均可由$\neg$以及$\to$定义. 例如,

$$\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &=_{df} \neg(\varphi \to \neg\psi) \\
\varphi \vee \psi &=_{df} \neg\varphi \to \psi \\
\varphi \leftrightarrow \psi &=_{df} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi).
\end{aligned}$$

模态词$\Diamond$定义如下:

$$\Diamond\varphi =_{df} \neg\Box\neg\varphi.$$

命题模态逻辑的语义: 框架

命题模态逻辑的框架$\mathbf{F}$是一个二元组(W, R), 其中

- W是一个可能世界的集合;
- $R \subseteq W^2$是可达关系.

框架分类

$\mathbf{F} = (W, R)$是一个框架，根据可达关系R我们把框架分成下面几类:

- $\mathbf{F}$是自反的当且仅当对于任意的$w \in W$有wRw;
- $\mathbf{F}$是对称的当且仅当对于任意的$w, w' \in W$，如果wRw'则$w'Rw$;
- $\mathbf{F}$是传递的当且仅当对于任意的$w, w', w'' \in W$，如果wRw'且$w'Rw''$则wRw'';
- $\mathbf{F}$是序列的当且仅当对于任意的$w \in W$，都存在某个$w' \in W$使得wRw'.

命题模态逻辑的模型

命题模态逻辑的模型$\mathbf{M}$是一个三元组(W, R, I), 其中

- $\mathbf{F} = (W, R)$是一个框架;
- I是一个解释, 使得对于任意的命题变量p, $I(p) \subseteq W$.

我们称一个模型(W, R, I)是基于框架(W, R)的.

公式在模型中的真假值

给定模型**M**, 对于任意的可能世界w, 有

$$\mathbf{M}, w \models \varphi \text{ iff } \begin{cases} w \in I(p) & \text{if } \varphi = p \\ \mathbf{M}, w \not\models \varphi_1 & \text{if } \varphi = \neg\varphi_1 \\ \mathbf{M}, w \models \varphi_1 \Rightarrow \mathbf{M}, w \models \varphi_2 & \text{if } \varphi = \varphi_1 \to \varphi_2 \\ \mathbf{A}w'((w, w') \in R \Rightarrow \mathbf{M}, w' \models \varphi_1) & \text{if } \varphi = \Box\varphi_1 \end{cases}$$

公式在模型，框架和框架类中的有效性

一个公式φ在一个模型**M**中是有效的，记为$\mathbf{M} \models \varphi$，当且仅当$\varphi$在**M**的所有的可能世界中都为真.

一个公式φ在一个框架**F**中是有效的，记为$\mathbf{F} \models \varphi$，当且仅当$\varphi$在基于此框架的所有模型中都是有效的.

给定一个框架类**C**，一个公式φ在**C**中是有效的当且仅当φ在**C**的每个框架中是有效的.

逻辑推论

给定一个公式集合Γ和一个公式φ，C是一个框架类，φ称为是Γ在C中的逻辑推论，记为

$$\Gamma \models_C \varphi,$$

如果对于任意的框架$\mathbf{F} \in C$，$\mathbf{F} \models \Gamma$蕴涵$\mathbf{F} \models \varphi$.

我们主要讲述K系统，因此我们将$\Gamma \models_C \varphi$简记为$\Gamma \models \varphi$.

模态系统K的公理系统

公理(模式):

$$
\begin{array}{l}
\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_1) \\
(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_3)) \\
(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\neg\varphi_2 \to \neg\varphi_1) \\
\Box(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\Box\varphi_1 \to \Box\varphi_2).
\end{array}
$$

推导规则:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{MP} & \dfrac{\varphi_1, \varphi_1 \to \varphi_2}{\varphi_2} \\
\mathrm{N} & \dfrac{\varphi_1}{\Box\varphi_1}
\end{array}
$$

第四条公理我们称为**K**公理.
模态系统D, T, B, S4和S5是在K的公理系统中加入相应的公理得到的. 例如, 系统D是在K的公理系统中加入公理$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$得到的; 系统T是在K的公理系统中加入公理$\Box\varphi \to \varphi$得到的.

命题模态逻辑K的公理证明和定理

公式序列$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$是一个公理证明，如果对于每个$i$，要么$\varphi_i$是一个公理，要么$\varphi_i$是由前面若干个公式应用推导规则得到的.

公式φ是命题模态逻辑K的公理定理，记为$\vdash \varphi$，如果存在一个命题模态逻辑K的公理证明$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$使得$\varphi = \varphi_n$.

一个理论的公理证明和定理

公式序列$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$是$\Gamma$的一个公理证明，如果对于每个$i$，要么$\varphi_i$是一个公理，要么$\varphi_i \in \Gamma$，要么$\varphi_i$是由前面若干个公式应用推导规则得到的.

给定理论Γ，公式φ是Γ的公理定理，记为$\Gamma \vdash \varphi$，如果存在Γ的一个公理证明$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$使得$\varphi = \varphi_n$.

模态系统K的导出规则

由系统K的公理系统我们可以得到下面的导出规则**DR**:

$$\frac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi}$$

证明

(1)	$\varphi \to \psi$	前提
(2)	$\Box(\varphi \to \psi)$	(1) $\times$ N
(3)	$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	**K**
(4)	$\Box\varphi \to \Box\psi$	(2), (3)$\times$ MP

命题逻辑的几个定理

后面证明系统K的定理时需要用到下面的几个命题逻辑的定理PC1–PC7，它们也是系统K的定理，在这里我们省略PC1–PC7的证明.

PC1	$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
PC2	$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
PC3	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \theta) \to (\varphi \to (\psi \wedge \theta)))$
PC4	$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$
PC5	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi))$
PC6	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \theta) \to (\varphi \to \theta))$
PC7	$(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \theta)$

模态系统K的几个定理

应用导出规则**DR**我们可以得到定理**K1–K3**.

K1 $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

证明

(1)	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	PC1
(2)	$\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\varphi$	(1)× **DR**
(3)	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$	PC2
(4)	$\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\psi$	(3)× **DR**
(5)	$(\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow ((\Box(\varphi \wedge \psi)$ $\rightarrow \Box\psi) \rightarrow (\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)))$	PC3
(6)	$(\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\psi) \rightarrow$ $(\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi))$	(2), (5)× MP
(7)	$\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$	(4), (6)× MP

K2 $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$

证明

(1)	$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	PC4
(2)	$\Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	(1)$\times$**DR**
(3)	$\Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$	**K**
(4)	$(\Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi))) \to$ $((\Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)))$ $\to (\Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))))$	PC6
(5)	$(\Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)))$ $\to (\Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)))$	(2), (4)$\times$MP
(6)	$\Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$	(3), (5)$\times$MP
(7)	$(\Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))) \to$ $((\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi))$	PC7
(8)	$(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$	(6), (7)$\times$MP

模态系统K的几个定理

K3 $\qquad \Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

证明

(1)	$\Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$	**K1**
(2)	$(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$	**K2**
(3)	$(\Box(\varphi \wedge \psi) \to (\Box\varphi \wedge \Box\psi)) \to$ $(((\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)) \to$ $(\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)))$	PC5
(4)	$((\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)) \to$ $(\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi))$	(1)(3)×MP
(5)	$\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$	(2)(4)×MP

命题模态逻辑的完备性

命题模态逻辑系统主要有K, D, T, B, S4和S5.

模态系统D, T, B, S4和S5是在K的公理系统中加入相应的公理得到的. D, T, B, S4和S5的完备性只需证明它们的典型模型所基于的框架满足相应的条件.

例如T的典型模型所基于的框架要求是自反框架; B的典型模型所基于的框架是对称框架; S4的典型模型所基于的框架是自反传递框架. 因此T, B和S4的完备性最终归结为分别证明典型模型中的可达关系R是自反的, 对称的以及自反传递的. 在此我们只证明K系统的完备性.

命题模态逻辑K的完备性定理

完备性定理 对于任意的公式集合Γ和任意的公式φ, 如果$\Gamma \models \varphi$则$\Gamma \vdash \varphi$.

命题模态逻辑K的完备性证明的三个步骤

反证法: 假设$\Gamma \nvdash \varphi$. 则$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$是协调的. 证明大体分下面三个步骤:

1. 将$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$扩展成极大协调集合$w_0$.
2. 构造典型模型$\mathbf{M}$, 对于任意的可能世界$w \in W$, 其中W是所有的极大协调的公式集合的集合, 使得对于任意的公式ψ, $\mathbf{M}, w \models \psi$当且仅当$\psi \in w$.
3. 由前面两步得到$\Gamma \not\models \varphi$, 与前提$\Gamma \models \varphi$矛盾.

协调集定义

首先我们给出协调集的定义.

定义 命题模态公式的集合Λ是协调的当且仅当不存在公式$\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Lambda$ 使得

$$\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n).$$

Lindenbaum定理

假设$\Gamma \nvdash \varphi$. 则$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$是协调的. 我们可以根据下面的定理把$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$扩展成极大协调集合$w_0$.

定理1[Lindenbaum] 假设Γ是一个协调的命题模态公式的集合, 则存在着一个极大协调的公式集合Γ^*, 使得$\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Lindenbaum定理证明

证明 命题模态逻辑的语言是可数的，因此命题模态逻辑的公式是可数的，可以把所有的公式排成一列: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. 我们归纳定义公式集合的序列如下:

$$\Gamma_0 = \Gamma,$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{如果}\Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}\text{是协调的}, \\ \Gamma_n & \text{否则}. \end{cases}$$

可以归纳证明对于任意的n, Γ_n是协调的.

Lindenbaum定理证明

令
$$\Gamma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Gamma_i.$$
则Γ^*是协调的. 如果它不是协调的, 则有Γ^*的某个有限子集是不协调的. 但Γ^*的每个有限子集都是某个Γ_n的子集, 但是我们已经证明了所有的Γ_n都是协调的. Γ^*也是极大的. 对于任意的公式 φ_i, 要么$\varphi_i \in \Gamma_i$要么$\neg\varphi_i \in \Gamma_i$. 因此要么$\varphi_i \in \Gamma^*$要么$\neg\varphi_i \in \Gamma^*$. □

典型模型

Λ是任意的公式集合，我们定义

$$\Box^{-}(\Lambda) = \{\psi : \Box\psi \in \Lambda\}.$$

构造典型模型$\mathbf{M}$，使得对于任意的可能世界$w \in W$和任意的公式ψ，$\mathbf{M}, w \models \psi$当且仅当$\psi \in w$.

典型模型$\mathbf{M}$是一个三元组(W, R, I)，其中
- W是由所有的极大协调公式集合构成的集合;
- 对于任意的$w, w' \in W$，wRw'当且仅当对于任意的公式φ，如果$\Box\varphi \in w$，则$\varphi \in w'$，即$\Box^{-}(w) \subseteq w'$.
- $w \in I(p)$ 当且仅当 $p \in w$.

引理

对公式的结构作归纳时，当$\psi = \Box\psi_1$且$\Box\psi_1 \notin w$，则$\neg\Box\psi_1 \in w$. 为了证明$\mathbf{M}, w \models \neg\Box\psi_1$，我们需找到$w$的一个可达的可能世界$w'$，使得$\mathbf{M}, w' \models \neg\psi_1$. w'由下面的引理确保其存在性.

引理2 如果Γ是一个协调的公式的集合，且包含公式$\neg\Box\gamma$，则$\Box^-(\Gamma) \cup \{\neg\gamma\}$ 是协调的.

假设引理2成立，则由定理1和引理2知：存在极大协调的集合Γ'，使得 $\Box^-(\Gamma) \subseteq \Gamma'$ 且 $\neg\gamma \in \Gamma'$. 因此，如果Γ是极大协调的，则有$\Gamma R \Gamma'$.

引理证明

证明 假设$\Box^{-}(\Gamma) \cup \{\neg\gamma\}$不是协调的. 则存在 $\Box^{-}(\Gamma)$的某个有限子集$\{\psi_1, ..., \psi_n\}$使得

$$\vdash \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \neg\gamma).$$

因此

$$\vdash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \gamma.$$

由**DR**得

$$\vdash \Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \Box\gamma.$$

引理证明

由**K3**得

$$\vdash (\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to \Box\gamma.$$

所以

$$\vdash \neg(\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n \wedge \neg\Box\gamma).$$

但这意味着$\{\Box\psi_1, ..., \Box\psi_n, \neg\Box\gamma\}$是不协调的; 因为$\psi_1, ..., \psi_n \in \Box^-(\Gamma)$, 所以$\Box\psi_1, ..., \Box\psi_n \in \Gamma$. 又$\neg\Box\gamma \in \Gamma$, 所以$\Gamma$是不协调的, 与$\Gamma$是协调的矛盾. $\Box$

典型模型的显著特点

定理3 对于任意的可能世界$w \in W$和任意的公式ψ, $\mathbf{M}, w \models \psi$当且仅当$\psi \in w$.

对ψ的结构归纳

证明 对ψ的结构作归纳.
情形1: $\psi = p$. $\mathbf{M}, w \models p$当且仅当$w \in I(p)$当且仅当$p \in w$.
情形2: $\psi = \neg\psi_1$. $\mathbf{M}, w \models \neg\psi_1$当且仅当$\mathbf{M}, w \not\models \psi_1$, 当且仅当$\psi_1 \notin w$, 当且仅当$\neg\psi_1 \in w$.
情形3: $\psi = \psi_1 \to \psi_2$. $\mathbf{M}, w \models \psi_1 \to \psi_2$当且仅当$\mathbf{M}, w \not\models \psi_1$或$\mathbf{M}, w \models \psi_2$, 当且仅当 $\psi_1 \notin w$或$\psi_2 \in w$, 当且仅当$\psi_1 \to \psi_2 \in w$.
情形4: $\psi = \Box\psi_1$.
情形4.1: 假设$\Box\psi_1 \in w$. 对于任意的w', 如果wRw', 则有$\psi_1 \in w'$, 所以有$\mathbf{M}, w' \models \psi_1$, 这对每个$w'$使得$wRw'$都成立, 所以有$\mathbf{M}, w \models \Box\psi_1$.
情形4.2: 假设$\Box\psi_1 \notin w$. 则有$\neg\Box\psi_1 \in w$. 根据引理2存在某个$w' \in W$使得wRw'且$\neg\psi_1 \in w'$. 所以有$\psi_1 \notin w'$. 由归纳假设得$\mathbf{M}, w' \not\models \psi_1$. 因为$wRw'$, 所以$\mathbf{M}, w \not\models \Box\psi_1$. $\square$

完备性定理证明

由前面两步得到$\Gamma \not\models \varphi$, 与前提$\Gamma \models \varphi$矛盾.

完备性定理 对于任意的公式集合Γ和任意的公式φ, 如果$\Gamma \models \varphi$则$\Gamma \vdash \varphi$.

证明 假设$\Gamma \nvdash \varphi$. 则$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$是协调的. 我们把这个集合扩展成极大协调集合$w_0$. 令$\mathbf{M} = (W, R, I)$是典型模型. 对于任意的公式$\psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, 有$\psi \in w_0$, 由定理3得$\mathbf{M}, w_0 \models \psi$. 所以有$\mathbf{M}, w_0 \models \Gamma$并且$\mathbf{M}, w_0 \models \neg\varphi$. 所以$\mathbf{M}, w_0 \not\models \varphi$. 因此有$\Gamma \not\models \varphi$, 与$\Gamma \models \varphi$矛盾. $\square$