§1 预备知识

§1.1 命题逻辑

...

$\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ 当且仅当 $\Gamma \models \varphi \to \psi$ 。

证明

若 $\Gamma \cup \{\varphi\} \not\models \psi$ ，则存在 v 使得所有 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ 的公式为真，而 ψ 为假。

则 v 使得所有 Γ 的公式为真，而 $\varphi \to \psi$ 为假。

则 $\Gamma \not\models \varphi \to \psi$ 。

类似地，若 $\Gamma \not\models \varphi \to \psi$ ，则 $\Gamma \cup \{\varphi\} \not\models \psi$ 。

...

$\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ 是可满足的当且仅当 $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ 是可满足的。

证明

若 $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ 可满足,则存在 v 使得所有 $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ 的公式为真。

则 v 使得 $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ 为真。

...

Γ 是不可满足的当且仅当每个逻辑公式都是 Γ 的逻辑推论。

证明

若 Γ 不可满足，则没有真值赋值满足 Γ 。

则对任意公式 φ ，所有满足 Γ 的真值赋值，都满足 φ 。

若每个逻辑公式都是 Γ 的逻辑推论，则 $\Gamma \models 0$ 。

则不可能有 v 满足 Γ 。不然则有 $v(0) = 1$ ，显然矛盾。

§1.2 谓词逻辑

...

$\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ 当且仅当 $\Gamma \models \varphi \to \psi$ 。

证明

若 $\Gamma \cup \{\varphi\} \not\models \psi$ ，则存在 I 和 I 中的 σ 对所有 $\varphi' \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ ， $I(\varphi')\sigma = 1$ ，而 $I(\psi)\sigma = 0$ 为假。

则 I 和 σ 对所有 $\varphi' \in \Gamma$ ， $I(\varphi')\sigma = 1$ ，而 $I(\varphi \to \psi)\sigma = 0$ 为假。

则 $\Gamma \not\models \varphi \to \psi$ 。

类似地，若 $\Gamma \not\models \varphi \to \psi$ ，则 $\Gamma \cup \{\varphi\} \not\models \psi$ 。

…

$\Gamma=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ 是可满足的当且仅当 $\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$ 是可满足的。

证明

若 $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ 可满足，则存在 I 和 I 中的 σ 对所有 $i=1,...,n$ ， $I(\varphi_i)\sigma=1$ 。

则 $I(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n)\sigma=1$ 为真。

…

Γ 是不可满足的当且仅当每个逻辑公式都是 Γ 的逻辑推论。

证明

若 Γ 不可满足，则没有 I 和 I 中的 σ 满足 Γ 。

则对任意公式 φ ，所有满足 Γ 的 I 和 I 中的 σ ，都满足 φ 。

若每个逻辑公式都是 Γ 的逻辑推论，则 $\Gamma\models P(x)\wedge\neg P(x)$ 。

则不可能有 I 和 I 中的 σ 满足 Γ 。不然则有 $I(P(x)\wedge\neg P(x))\sigma=1$ ，显然矛盾。

§1.3 集合

…

$$\boxed{\begin{array}{lcl} A\cup(B\cap C) & = & A\cup B\cap A\cup C \\ A\cup(A\cap B) & = & A \\ \sim(A\cup B) & = & \sim A\cap\sim B \end{array}}$$

证明 (1)

$x\in A\cup(B\cap C)\Leftrightarrow x\in\{x\,|\,x\in A\vee x\in(B\cap C)\}$
$x\in A\cup(B\cap C)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in(B\cap C)$
$x\in A\cup(B\cap C)\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$
$x\in A\cup(B\cap C)\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$
$x\in A\cup(B\cap C)\Leftrightarrow(x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C)$
$x\in A\cup(B\cap C)\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证明 (2)

$A\cup(A\cap B)\Leftrightarrow(A\cup A)\cap(A\cup B)$
$A\cup(A\cap B)\Leftrightarrow A\cap(A\cup B)$
$A\cup(A\cap B)\Leftrightarrow A$ （该等价结论前面有过）

证明 (3)

$\sim(A\cup B)\Leftrightarrow U-(A\cup B)$
$x\in\sim(A\cup B)\Leftrightarrow x\in\{x\,|\,x\in U\wedge x\notin(A\cup B)\}$
$x\in\sim(A\cup B)\Leftrightarrow x\in U\wedge x\notin(A\cup B)$
$x\in\sim(A\cup B)\Leftrightarrow x\in U\wedge(x\notin A)\wedge(x\notin B)$
$x\in\sim(A\cup B)\Leftrightarrow(x\in U\wedge x\notin A)\wedge(x\in U\wedge x\notin B)$

$x \in \sim (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in U - A) \wedge (x \in U - B)$
$x \in \sim (A \cup B) \Leftrightarrow x \in (U - A) \cap (U - B)$
$x \in \sim (A \cup B) \Leftrightarrow x \in \sim A \cap \sim B$

§1.4 关系

...

设 $\langle P, \leq \rangle$ 为良基集合。记 $x \leq y$ 且 $x \neq y$ 为 $x < y$ 。以下推理规则为良基集合上的归纳法 (Noetherian Induction) 。

若 $\forall x' \in P.(\forall x \in P.(x < x' \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \varphi(x'))$ 则
$\forall x \in P.\varphi(x)$ 。

证明

设 $\forall x' \in P.(\forall x \in P.(x < x' \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \varphi(x'))$ 且 $\neg\forall x \in P.\varphi(x)$ 。

则 $\exists x \in P.\neg\varphi(x)$ 。

则 $\neg\varphi(x_0)$ 。

由于 $\forall x \in P.(x < x_0 \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \varphi(x_0)$ ，则 $\neg\forall x \in P.(x < x' \rightarrow \varphi(x))$ 。

由于 $\forall x \in P.(x < x_0 \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \varphi(x_0)$ ，则 $\exists x \in P.(x < x_0 \wedge \neg\varphi(x))$ 。

则 $x_1 < x_0 \wedge \neg\varphi(x_1)$ 。

依此类推，P 中存在无限递减序列 $x_0, x_1, \ldots$ 。矛盾。

§1.5 函数

...

$\sqcup S$ 存在当且仅当对于所有 $x \in X$ ， $\sqcup S(x)$ 存在，且对于所有 $x \in X$ ， $(\sqcup S)(x) = \sqcup S(x)$ 。

证明

(1) 设 $\sqcup S$ 存在。

根据定义，对于所有 $f \in S$ 有 $\sqcup S \geq f$ ，且若有 g 对于所有 $f \in S$ ， $g \geq f$ ，则 $g \geq \sqcup S$ 。

给定任意 $x \in X$ ，则对于所有 $f \in S$ ， $(\sqcup S)(x) \geq f(x)$ 。

则 $(\sqcup S)(x)$ 是 $S(x)$ 的一个上界。

又若有 $y \in Y$ 是 $S(x)$ 的上界，即对所有 $x \in X$ ，$y \geq f(x)$ 。

设 $g = (\sqcup S)[x/y]$（ x 的值用 y 替换）。

则 $g \geq \sqcup S$ 。

则 $y \geq (\sqcup S)(x)$ 。

因此 $(\sqcup S)(x)$ 是 $S(x)$ 的最小上界。

则 $\sqcup S(x)$ 存在，且 $(\sqcup S)(x) = \sqcup S(x)$ 。

(2) 设对于所有 $x \in X$ ， $\sqcup S(x)$ 存在。

定义 $g(x) = \sqcup S(x)$ 。

显然 g 是 S 的上界且是最小上界。

因此 $\sqcup S$ 存在，且 $(\sqcup S)(x) = \sqcup S(x)$ 。

§1.6 完全偏序和格上的不动点

…

设 $\langle X, \leq \rangle$ 是完全格， $f : X \to X$ 是单调函数。则 f 有非空的不动点集，且该集构成一个完全格，f 有最小和最大不动点。

$$\mu f = \sqcap \{x \in X \mid f(x) \leq x\}$$
$$\nu f = \sqcup \{x \in X \mid x \leq f(x)\}$$

证明

由 $f(\top) \leq \top$ 知 $\{x \in X \mid f(x) \leq x\}$ 不是空集。
设 $A = \sqcap \{x \in X \mid f(x) \leq x\}$ 。
则 $f(A) \leq \sqcap \{f(x) \in X \mid f(x) \leq x\}$ 。
则 $f(A) \leq \sqcap \{x \in X \mid f(x) \leq x\} \leq A$ 。
由 $ff(A) \leq f(A)$ 知 $f(A) \in \{x \in X \mid f(x) \leq x\}$ 。
则 $A \leq f(A)$ 。
则 $A = f(A)$ 。
由于 $A \leq \sqcap \{x \in X \mid f(x) = x\}$ ， A 是最小不动点。
类似地可以证明， $\sqcup \{x \in X \mid x \leq f(x)\}$ 是最大不动点。
设 $B = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ ， B' 为 B 的任意子集。
则对任意 $b' \in B'$ ， $\sqcap B' \leq b'$ 。
则 $f(\sqcap B') \leq f(b') = b'$ 。
因此 $f(\sqcap B') \leq \sqcap B'$ 。
取 $B'' = \{y \in X \mid y \leq \sqcap B'\}$ 。
则 B'' 是完备格。
对任意 $y \in B''$ ，则 $f(y) \leq f(\sqcap B') \leq \sqcap B'$ 。
因此 $f(y) \in B''$ 。
f 是 B'' 上的单调函数，有最大不动点，记为 y_0 。
则 $y_0 \leq \sqcap B'$ 。
y_0 即 B' 在 B 中的最大下界。
则 B 的任意子集有最大下界， B 是完备格。

§1.7 有向图

…

$\sigma \subseteq V_1 \times V_2$ 是一个 D_1 到 D_2 的模拟关系当且仅当对任意 $(u, v) \in \sigma$ ，对任意 $u' \in V_1$ ，如果 $E_1(u, u')$ ，则存在 $v' \in V_2$ ， $E_2(v, v')$ 且 $(u', v') \in \sigma$ 。

.

σ 是模拟关系当且仅当 $\sigma^{-1} E_1 \subseteq E_2 \sigma^{-1}$ 。

证明

设 σ 是模拟关系。
设 $(v, u') \in \sigma^{-1} E_1$ 。
则存在 u ， $(u, v) \in \sigma$ 且 $(u, u') \in E_1$ 。
则存在 v' ， $(v, v') \in E_2$ 且 $(u', v') \in \sigma$ 。
因此 $(u, v)^{-1}(u, u') = (v, u') = (v, v')(u', v')^{-1} \in E_2 \sigma^{-1}$ 。

设 $\sigma^{-1}E_1 \subseteq E_2\sigma^{-1}$ 。

则对任意 $(u,v) \in \sigma$ ，

若 $(u,u') \in E_1$ ，则 $(v,u') \in \sigma^{-1}E_1$ 。

则 $(v,u') \in E_2\sigma^{-1}$ 。

则存在 v' ， $(v,v') \in E_2$ 且 $(u',v') \in \sigma$ 。

则 σ 是模拟关系。

...

σ 是互模拟关系当且仅当 $\sigma^{-1}E_1 \subseteq E_2\sigma^{-1}$ 且 $\sigma E_2 \subseteq E_1\sigma$ 。

证明

类似模拟关系的证明。