中国科学院研究生院课程讲稿

§1.1 命题逻辑

设 Γ 为命题逻辑公式集合， φ, ψ 为命题逻辑公式。

证明

$\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ 当且仅当 $\Gamma \models \varphi \to \psi$ 。

§1.2 谓词逻辑

设 Γ 为谓词逻辑公式集合。

证明

Γ 是不可满足的当且仅当每个逻辑公式都是 Γ 的逻辑推论。

§1.3 集合

设 A, B 为集合。

证明

$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ 。

§1.4 关系

设 $\langle P, \leq \rangle$ 为良基集合。

证明

$$\text{若 } \forall x' \in P.(\forall x \in P.(x < x' \to \varphi(x)) \to \varphi(x')) \text{ 则 } \forall x \in P.\varphi(x) \text{ 。}$$

§1.5 函数

设 $S \subseteq (X \to Y)$ 是一个 X 到 Y 的函数的集合。

证明

$\sqcup S$ 存在当且仅当对于所有 $x \in X$ ， $\sqcup S(x)$ 存在，且对于所有 $x \in X$ ， $(\sqcup S)(x) = \sqcup S(x)$ 。

§1.6 完全偏序和格上的不动点

设 $\langle X, \leq \rangle$ 是完全格， $f : X \to X$ 是单调函数。

证明

f 有非空的不动点集，且该集构成一个完全格， f 有最小和最大不动点。

$$\mu f = \sqcap\{x \in X \mid f(x) \leq x\}$$
$$\nu f = \sqcup\{x \in X \mid x \leq f(x)\}$$

§1.7 有向图

设 $V_1 = (D_1, E_1), V_2 = (D_2, V_2)$ 是有向图。

证明

$\sigma \subseteq V_1 \times V_2$ 是互模拟关系当且仅当 $\sigma^{-1}E_1 \subseteq E_2\sigma^{-1}$ 且 $\sigma E_2 \subseteq E_1\sigma$ 。