§2　程序与系统模型

§2.1　流程图程序

习题：　计算阶乘程序的流程图程序表示,及相应的 (B, V) 和 I 。

解答

$$\boxed{\begin{array}{ll} beg: & (x,y) := (1,a) \text{ goto } z_0 \\ z_0: & \text{if } (y>1) \text{ goto } z_1 \text{ else goto } end \\ z_1: & (x,y) := (x*y, y-1) \text{ goto } z_0 \end{array}}$$

图 1　流程图程序

$B = (F, P)$ 和 V 定义如下：

$$\boxed{\begin{array}{lcl} F & = & \{1, -, *\} \\ P & = & \{>\} \\ V & = & \{x, y, a\} \end{array}}$$

$I = (Int, I_0)$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} I_0(1) & = & 1 \\ I_0(-) & = & - \\ I_0(*) & = & \times \\ I_0(>) & = & > \end{array}}$$

§2.2　结构化循环语句程序

习题：　计算阶乘程序的结构化循环语句程序表示，及相应的 (B, V) 和 I 。

解答

$$\boxed{\begin{array}{l} x=1; y=a; \\ \text{while } (y>1) \text{ do } x := x*y; y := y-1 \text{ od} \end{array}}$$

图 2　结构化循环语句程序

$B = (F, P)$ 和 V 定义如下：

$$\boxed{\begin{array}{lcl} F & = & \{1, -, *\} \\ P & = & \{>\} \\ V & = & \{x, y, a\} \end{array}}$$

$I = (Int, I_0)$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} I_0(1) & = & 1 \\ I_0(-) & = & - \\ I_0(*) & = & \times \\ I_0(>) & = & > \end{array}}$$

§2.3 一阶迁移系统 (FTS)

习题： 计算阶乘程序的一阶迁移系统表示，及相应的 (B, V) 和 I 。

解答

计算阶乘的程序表示为 B 上的迁移系统 (T, Θ)

T 为以下迁移：

$$\begin{array}{lcl} s = beg & \longrightarrow & (x, y, s) := (1, a, z_0) \\ s = z_0 \wedge (y > 1) & \longrightarrow & (s) := (z_1) \\ s = z_0 \wedge \neg(y > 1) & \longrightarrow & (s) := (end) \\ s = z_1 & \longrightarrow & (x, y, s) := (x * y, y - 1, z_0) \end{array}$$

$\Theta = (s = beg \wedge a \geq 0)$ 。

图 3 一阶迁移系统

$B = (F, P)$ 和 V 定义如下：

$$\begin{array}{lcl} F & = & \{beg, end, z_0, z_1, 1, -, *\} \\ P & = & \{=, >, \geq\} \\ V & = & \{x, y, a, s\} \end{array}$$

$I = (Int, I_0)$

$$\begin{array}{lcccc} I_0(beg) & & & = & 0 \\ I_0(end) & = & I_0(1) & = & 1 \\ I_0(z_0) & & & = & 2 \\ I_0(z_1) & & & = & 3 \\ I_0(-) & & & = & - \\ I_0(*) & & & = & \times \\ I_0(=) & & & = & = \\ I_0(>) & & & = & > \\ I_0(\geq) & & & = & \geq \end{array}$$

§2.4 标号迁移系统与自动机

习题：

定义扩展 Büchi 自动机的并与交.

解答

给定两个扩展 Büchi 自动机 $\mathcal{B}_1 = \langle \Sigma, S_1, \Delta_1, I_1, F_1 \rangle$, $\mathcal{B}_2 = \langle \Sigma, S_2, \Delta_2, I_2, F_2 \rangle$ 且 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 。

并

设

$$F = \{f \cup S_2 \mid f \in F_1\} \cup \{S_1 \cup f \mid f \in F_2\}$$

定义 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \langle \Sigma, S_1 \cup S_2, \Delta_1 \cup \Delta_2, I_1 \cup I_2, F \rangle$ ，则 $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \mathcal{L}(\mathcal{B}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B}_2)$ 。

交

设

$$\begin{aligned}&\Delta = \{((q_1,q_2),a,(q_1',q_2')) \mid (q_1,a,q_1') \in \Delta_1, (q_2,a,q_2') \in \Delta_2\}\\&F = \{f \times S_2 \mid f \in F_1\} \cup \{S_1 \times f \mid f \in F_2\}\end{aligned}$$

定义 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \langle \Sigma, S_1 \times S_2, \Delta, I_1 \times I_2, F\rangle$，则 $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = \mathcal{L}(\mathcal{B}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{B}_2)$。

习题：
一、讨论存在扩展 Büchi 自动机上的二元运算 $\oplus$ 使得 $L(A \oplus B) = L(A \cup B)$ 且 $A \oplus B$ 比 $A \cup B$ 小的可能性。
二、讨论存在扩展 Büchi 自动机上的二元运算 $\otimes$ 使得 $L(A \otimes B) = L(A \cap B)$ 且 $A \otimes B$ 比 $A \cap B$ 小的可能性。

解答

讨论字符、状态、迁移、初始状态、接受状态。
讨论状态的可达性及相关的迁移。
讨论接受状态：
比如定义 $(A \oplus B)$ 中的接受状态集的集合如下：

$$F = \{f_A \cup f_B \mid f_A \in F_A, f_B \in F_B\}$$

习题：
给定扩展 Büchi 自动机 $\mathcal{B} = \langle \Sigma, S, \Delta, I, \{f_1, ..., f_n\}\rangle$。定义与之语言相同的 Büchi 自动机。

解答

定义

$n(s,i)$	$=$	if $(i=n)$ then 0; else if $(s \in f_{i+1})$ then $i+1$; else i.
S'	$=$	$S \times \{0, ..., n\}$
Δ'	$=$	$\{(s,i),a,(s',n(s',i)) \mid (s,a,s') \in \Delta, i \in \{0,...,n\}\}$
I'	$=$	$I \times \{0\}$
F'	$=$	$S \times \{n\}$

定义 Büchi 自动机 $\mathcal{B}' = \langle \Sigma, S', \Delta', I', F'\rangle$，则 $\mathcal{L}(\mathcal{B}') = \mathcal{L}(\mathcal{B})$。

§2.5 时间自动机

习题： 设有红、黄、绿三种颜色的信号灯。要求信号灯的变化依次为绿、红、黄、绿、红、黄、绿等，且黄灯的长度为 1，绿灯的长度不小于 10，红灯的长度不小于 10，变化周期绿、红、黄的总长度为 30。设计一个信号灯变化的模型。能否设计一个模型使得绿灯和红灯的长度逐渐趋于一致？

解答

(1) $A = \langle \Sigma, S, \Delta, I, F \rangle$ 其中

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ 。
- $S = \{s_0, s_1, s_2\}$ 。
- $\Delta = \{$

  $(s_0, a, \{y\}, 10 \le x \le 19, s_1)$,
  $(s_1, b, \{\}, x = 29, s_2)$,
  $(s_2, c, \{x\}, x = 30, s_0)$
  $\}$ 。
- $I = \{s_0\}$ 。
- $F = \{s_0, s_1, s_2\}$ 。

(2) $B = \langle \Sigma, S, \Delta, I, F \rangle$ 其中

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ 。
- $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ 。
- $\Delta = \{$

  $(s_0, a, \{y\}, x = 19, s_1)$,
  $(s_1, b, \{\}, x = 29, s_2)$,
  $(s_2, c, \{x\}, x = 30, s_3)$,
  $(s_3, a, \{y\}, x \ge 14.5 \wedge y < 30, s_1)$
  $\}$ 。
- $I = \{s_0\}$ 。
- $F = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ 。

§2.6 Petri 网

习题： 设有四个生产者 A 、 B 、 C 、 D 和一个消费者 E 。用 Petri 网描述以下过程。 A 不停地生产零件 a， B 不停地生产零件 b， C 使用 a 和 b 生产零件 c， D 使用 a 和 c 生产产品 d， E 不停地消费产品 d 。

解答

定义 $\langle P, T, F, M_0 \rangle$ 如下：

- $P = \{a, b, c, d\}$
- $T = \{A, B, C, D, E\}$
- $F =$

  $\{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)\} \cup$
  $\{(a, C), (a, D), (b, C), (c, D), (d, E)\} \cup$
- $\forall s \in P.(M_0(s) = 0)$ 。