§3 程序逻辑

§3.1 线性时序逻辑 (LTL)

习题： 用语义证明 $\Box(p \to Op) \to (p \to \Box p)$ 成立，并说明为什么从右推左不成立。

解答

根据逻辑推理的原则，只需证明以下目标

$\Box(p \to Op) \wedge p \to \Box p$ 。

即要证明对任意 M, π^k ：

$M, \pi^k \models \Box(p \to Op) \wedge p \to \Box p$ 成立。

即要证明对 $M, \pi^k \models \Box(p \to Op) \wedge p$ 成立则 $M, \pi^k \models \Box p$

证明前提为 $\forall i \geq k, M, \pi^i \models p \to Op$ 和 $M, \pi^k \models p$ 。

需证明 $\forall i \geq k, M, \pi^i \models p$ 。

用归纳法。首先根据前提我们有 $M, \pi^k \models p$ 。

假设对 $n \geq k$ ， $M, \pi^n \models p$ 成立，根据前提我们有 $M, \pi^{n+1} \models p$ 。

因此根据归纳法， $\forall i \geq k, M, \pi^i \models p$ 成立。

设我们有 M, π 且 $L(\pi_0) = \{\}, L(\pi_0) = \{p\}, L(\pi_0) = \{\}$ 。

则 $M, \pi \models p \to \Box p$ 而 $M, \pi \models \Box(p \to Op)$ 不成立。

习题： 用 PLTL 写下信号等变化的规范：信号灯依次序绿红黄变化，每个状态有且只有一个信号，初始信号为黄色，黄色只停留一个状态，红绿色可以连续在多个状态上成立。

解答

$$
\begin{aligned}
& ye \wedge \\
& \Box((ye \vee gr \vee red) \wedge \neg(ye \wedge gr) \wedge \neg(ye \wedge red) \wedge \neg(gr \wedge red)) \wedge \\
& \Box((ye \to Ogr) \wedge (gr \to (grUred)) \wedge (red \to (redUye)))
\end{aligned}
$$

$\Box(ye \vee gr \vee red)$ 可以不要。

§3.2 计算树逻辑 CTL

习题： 讨论 $A(pUr) \vee A(qUr)$ 和 $A((p \vee q)Ur)$ 的关系及满足这些公式的结构的特征。

解答

我们可以证明 $A(pUr) \vee A(qUr) \to A((p \vee q)Ur)$ 。

根据逻辑推理的原则，只需证明以下目标 $A(pUr) \to A((p \vee q)Ur)$ 和 $A(qUr) \to A((p \vee q)Ur)$ 。

根据语义证明。

满足这些公式的结构特征可以描述如下：

将满足 $A(pUr) \vee A(qUr)$ 的树结构中所有满足 r 节点的子树去掉，则剩下部分为有穷树且其所有节点都满足 p 或都满足 q 。

将满足 $A((p \vee q)Ur)$ 的树结构中所有满足 r 节点的子树去掉, 则剩下部分为有穷树且其所有节点都满足 p 或 q 。

习题: 用简化自动售茶机模型计算 $[[A(q_0Uq_2)]]$ 、$[[EG(q_0 \vee q_2)]]$ 并讨论该模型是否满足这些公式。

解答

简化自动售茶机模型为: $\langle S, \Delta, I, L\rangle$

- $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$
- $\Delta = \{(s_0, s_1), (s_0, s_2), (s_1, s_3), (s_1, s_5), (s_2, s_5), (s_2, s_4), (s_3, s_5), (s_3, s_4), (s_4, s_5), (s_5, s_0)\}$
- $I = \{s_0\}$
- L 定义如下: $\boxed{\begin{array}{l} L(s_0) = \{p_0, q_0\} \\ L(s_1) = \{p_1, q_0\} \\ L(s_2) = \{p_2, q_0\} \\ L(s_3) = \{p_2, q_0\} \\ L(s_4) = \{p_4, q_1\} \\ L(s_5) = \{p_3, q_2\} \end{array}}$

$$A(q_0Uq_2) = \mu Z.(q_2 \vee (q_0 \wedge AXZ))$$

$S_0 = false$
$S_1 = q_2 = \{s_5\}$
$S_2 = \{s_5\} \cup (\{s_0, s_1, s_2, s_3\} \cap \{s_4\}) = \{s_5\}$
因此该模型不满足这个公式。

$$EG(q_0 \vee q_2) = \nu Z.((q_0 \vee q_2) \wedge EXZ)$$

$S_0 = true$
$S_1 = q_0 \vee q_2 = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_5\}$
$S_2 = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_5\} \cap \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_5\}$
因此该模型满足这个公式。

§3.3 计算树逻辑 CTL*

习题: 讨论 $A((pUr) \vee (qUr))$ 与 $A(pUr) \vee A(qUr)$ 和 $A((p \vee q)Ur)$ 的关系及满足 $A((pUr) \vee (qUr))$ 的结构的特征。

解答

我们可以根据语义证明
$A(pUr) \vee A(qUr) \rightarrow A((pUr) \vee (qUr))$ 和
$A((pUr) \vee (qUr)) \rightarrow A((p \vee q)Ur)$ 。
满足这些公式的结构特征可以描述如下:
将满足 $A((pUr) \vee (qUr))$ 的树结构中所有满足 r 节点的子树去掉, 则剩下部分为有穷树且每条路径上的点要么全满足 p 要么全满足 q 。

§3.4 μ- 演算

习题： 以自动售茶机为例，计算 $\mu X.(q_1 \vee \langle 2 \rangle X)$ 并讨论系统是否满足这个公式。

解答

$S_0 = false$
$S_1 = q = \{s_4\}$
$S_2 = \{s_2, s_3, s_4\}$
$S_3 = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$
$S_4 = \{s_0, s_2, s_3, s_4\}$

系统初始状态 s_0 满足 $\mu X.(q_1 \vee \langle 2 \rangle X)$，即系统满足这个公式。