1. Let $L \subseteq \{a, b\}^*$ be the set of words with "equal number of a's and b's". Prove that L is not a VPL with respect to any partition of $\Sigma = \{a, b\}$

   证明：假设L是VPL，则存在一个Σ的划分，在该划分下存在一个VPA接受的语言为L. Σ的划分有几种情况：

   如果$\Sigma_c = \emptyset$或$\Sigma_r = \emptyset$, 则该VPA退化为有限自动机。设有限自动机有n个状态，由L语言的定义可知$a^{n+1}b^{n+1} \in L$，在该字符串作为输入的情况下有$s_0 \xrightarrow{a} \cdots \xrightarrow{a} s_{n+1} \xrightarrow{b} s_{n+2} \xrightarrow{b} \cdots \xrightarrow{b} s_{2n+2} = s_f$, 由鸽巢原理有$\exists i, j \in \{1, \ldots, n+1\} \cdot i < j \wedge s_i = s_j$, 据此，结合有限自动机的性质，有$a^{n+1+(j-i)}b^{n+1} \in L$，这与$L$的定义矛盾.

   如果$\Sigma_c \neq \emptyset \wedge \Sigma_r \neq \emptyset$,则$a, b$两个符号只能是一个在$\Sigma_c$中，一个在$\Sigma_r$中. 不失一般性，假设$\Sigma_c = \{a\}$, $\Sigma_r = \{b\}$, 并且假设VPA的状态有n个，根据L的定义有$b^{n+1}a^{n+1} \in L$, VPA在该输入下相应的状态轨迹为$(q_0, \perp) \xrightarrow{b} (q_1, \perp) \xrightarrow{b} \cdots \xrightarrow{b} (q_{n+1}, \perp) \xrightarrow{a} (q_{n+2}, \pi_1 \cdot \perp) \xrightarrow{a} \cdots \xrightarrow{a} (q_{2n+2}, \pi_{n+1} \cdot \perp)$, 其中字符串$\pi_i$长度为$i$, 根据鸽巢原理，$\exists i, j \in \{1, \ldots, n+1\} \cdot i < j \wedge q_i = q_j$结合VPA的性质有$(q_0, \perp) \xrightarrow{b^{n+1+(j-i)}a^{n+1}} (q_{2n+2}, \pi_{n+1} \cdot \perp)$，即$b^{n+1+(j-i)}a^{n+1} \in L$, 这与$L$的定义矛盾.

   综上可知，L不是VPL